ЗА ЕДЕН ВИД ГЕОМЕТРИСКИ КОНСТРУКЦИИ

ЈОЖЕ УЛЧАР

Едно од стредствата за подигање интересот на учениците за математика, а нарочно за геометрија, е изучување на најразновидни геометриски конструкции. Тие се пред сè одлично средство во наставата по математика за негување способноста на учениците како за правилно логично расудување така и за уочување на севозможни меѓусебни односи меѓу различните геометриски обекти што се во некоја врска со решаваниот проблем. Помошни средста што ги ползуваме при разрешување на разни конструктивни проблеми се најразлични. Едно од нив се *геометриските пресликувања*, кои и сами по себе претставуваат во современата настава по математика — и во средна школа — сè поголем интерес.

Во овој напис ќе покажеме, илустрирано со неколку примери, како при решавањето на конструктивни проблеми може со успех да се користи едно пресликување чии особини можат да усвојат и ученици од средна школа — таканареченото *движење* во рамнината.

I. Движења се такви пресликувања на точките од една рамнина во точките од истата рамнина при кое секоја фигура од рамнината се пресликува во една нејзе с к л а д н а фигура.

Ние ќе се служиме со две специјални движења: со *ротација* околу една точка и со *транслација*.

1. Р о т а ц и ј а. Нека ни е зададена една рамнина π и една точка O во неа. Обратно-еднозначното пресликување ρ на точките од таа рамнина во точките од истата рамнина, при кое на секоја точка M од π одговара точката M' од π така да важи

$$\overline{OM} = \overline{OM'}, \ \sphericalangle MOM' = \varphi,$$

каде што φ е еден константен ориентиран агол во π, го викаме *ротација на рамнината π околу точката O за агол φ*.

Ротацијата на рамнината околу O за агол $+180°$ (или $-180°$) се вика *централна симетрија на рамнината во однос на O*.

Лесно се покажува:

Секоја права p од рамнината π преј̄дува по̄сле ро̄тацијата на рамнината π за агол φ во една права p' од та̄а рамнина која со p зафаќа агол φ.

2. Транслација. Во рамнината π ќе определиме сега едно друго пресликување — ќе го означиме со τ — на следниот начин. Во π нека се зададени две точки A и A'. Ако M е која да е точка од π, ќе ја сметаме како нејзина слика при τ онаа точка M' од π за која важи

$$\overline{AA'} \parallel \overline{MM'}, \ \overline{AM} \parallel \overline{A'M'}.$$

Секоја точка M се пресликува, значи, при τ, во точката M' така да ориентираната отсечка (вектор) $\overrightarrow{MM'}$ биде еднаква на сталната ориентирана отсечка $\overrightarrow{AA'}$. Ова пресликување τ се вика *транслација на рамнината π во сама себе за вектор* $\overrightarrow{AA'}$.

Од оваа дефиниција се докажува овој став:

При транслацијата τ на една рамнина сама во себе за вектор $\overrightarrow{AA'}$ *преј̄дува секоја права p која не е па̄ралелна со* $\overline{AA'}$ *во една права p' која е па̄ралелна со p, а секоја права q што е па̄ралелна со* $\overline{AA'}$ *преј̄дува сама во себе*, т. е. секоја точка од q преј̄дува при τ во некоја точка на q.

II. Спомнатите пресликувања ρ и τ можат во извесни случаи да се ползуваат при решавањето на конструктивни проблеми. Тоа се оние случаи при кои може да се избере едно такво специјално движење δ при кое бараната фигура преј̄дува во себе, или при кое некој нејзин елемент преј̄дува во некој друг нејзин елемент, а да се податоците такви да можеме да ги конструираме сликите, при δ, на дадените елементи. Како станува тоа, ќе покажеме на неколку примери. Во 1. пример ќе ползуваме централна симетрија, во 2. и 3. пример — ротација, а во 4. и 5. пример — ротација и транслација.

1. пример. *Во рамнината се дадени два круга K_1 и K_2 со це̄нтрови O_1 и O_2, а со радиуси R_1 и R_2. Да се ко̄нструира па̄ралелограм кој две те̄миња има на K_1, и две на K_2, а пресеко̄т на диј̄агоналите да биде во една зададена то̄чка T.*

Решение. Нека биде $\overline{AB}$ една диј̄агонала на бараниот паралелограм. A нека е на K_1, а B на K_2. A е значи централно симетрична слика од B во однос на T.

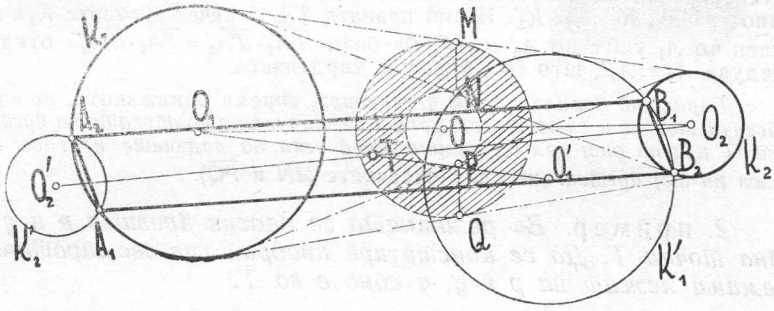
Го извршуваме централносиметричното пресликување на рамнината во однос на T. Кругот K_1 ќе преј̄де во еден круг K_1' со центар O_1', а кругот K_2 во некој круг K_2' со центар O_2'. Бидејќи A лежи на K_1, ќе лежи неговата слика B на сликата од K_1 т. е. на K_1'. Значи B лежи освен на K_2,

како што претпоставивме, и на K_1'. Со тоа ја најдовме точката B како пресек на K_2 и K_1'. Добивме две решенија за B; ќе ги означиме со B_1, B_2.

При истото пресликување точките B_1 и B_2 прејдуваат во две точки A_1 и A_2 кои лежат на сликата K_2' од K_2. A_1, A_2 се значи пресеците на K_2' и K_1.

Поставениот проблем има, значи, точно едно или ниедно решение според тоа дали круговите K_1 и K_2' (односно K_2 и K_1') се сечат или не. Решение постои, спрема тоа тогаш кога важи

$$(1) \qquad |R_1 - R_2| \leqq \overline{O_1 O_2'} \leqq R_1 + R_2.$$



Сл. 1

Да испитаме кога е проблемот решлив по однос на положбата на дадената точка T. Неравенствата (1) покажуваат дека во случај на решливоста на проблемот точката O_2' треба да лежи во кружниот прстен Π, заграден со круговите чии радиуси се $|R_1 - R_2|$ и $R_1 + R_2$, а заедничкиот центар им е во O_1. Лесно се увидува[1]) дека во тој случај T се најдува во прстенот Π', заграден со круговите чии заеднички центар е средината O на отсечката $\overline{O_1 O_2}$, а радиусите им се $\frac{1}{2} \cdot |R_1 - R_2|$ и $\frac{1}{2} \cdot (R_1 + R_2)$ (На цртежот шрафираната област).

Решението може да биде и дегенерирано. Ако се имено точките T, A_1, A_2 на една права, тогаш паралелограмот $A_1 B_2 B_1 A_2$ дегенерира во една отсечка. Тоа може да стане така да точките A_1 и A_2 совпаднат, а може да се случи паралелограмот да дегенерира кога A_1 и A_2 не совпаднуваат.

---

[1]) Земајќи предвид дека пресликувањето $O_2' \to T$ е хомотетија (соодветни фигури се слични и слично положени) во однос на центарот на хомотетија O_2 и со односот на хомотетија еднаков на $\frac{1}{2}$. — Или аналитички.

Во првиот случај, значи кога A_1 и A_2, а спрема тоа и B_1, B_2, совпаднуваат, круговите K_1 и K_2' се допираат. Во една од неравенствата (1) постои, значи, знак за еднаквост, што значи дека O_2' лежи на контурата од прстенот Π. Точката T лежи тогаш на контурата на прстенот Π' (сравни ја забелешката[1])). Очигледно важи и обратно.

Да го разгледаме и вториот случај, кога бараниот паралелограм дегенерира, а точките A_1 и A_2 не совпаднуваат. Бидејќи точките T, A_1, A_2 лежат на една права, точката T има во однос на круговите K_1 и K_2' степен (потенција) еднаква на $\overline{TA_1} \cdot \overline{TA_2}$; а бидејќи T, B_1, B_2 лежат на една права, тоа T има во однос на K_2 и K_1' степени еднакви на $\overline{TB_1} \cdot \overline{TB_2}$. Но поради $\overline{TA_1} = \overline{TB_1}$, $\overline{TA_2} = \overline{TB_2}$ е $\overline{TA_1} \cdot \overline{TA_2} = \overline{TB_1} \cdot \overline{TB_2}$. T има, значи, иста степен во однос на K_1 и K_2; таа лежи, спрема тоа, на радикалната оска на круговите K_1 и K_2. Обратно, ако T лежи на радикалната оска од K_1 и K_2, а проблемот има решение, паралелограмот дегенерира во една отсечка. Навистина, тогаш T има иста степен во однос на K_1, K_2, K_1', K_2'. И ако правата TA_1 ги сече круговите K_1 и K_2' освен во A_1 уште во A_2' и A_2'', би било $\overline{TA_1} \cdot \overline{TA_2'} = \overline{TA_1} \cdot \overline{TA_2''}$ откаде следува $A_2' \equiv A_2''$, што го докажува тврдението.

Бараниот паралелограм дегенерира, спрема покажаното, *во една отсечка тогаш и само тогаш кога T се најдува на контурата на прстенот Π' или на оној дел од радикалната оска на дадените кругови кој лежи во тој прстен.* (на сл. 1 отсечките $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$).

2. пример. *Во рамнината се дадени правите p и q и една точка T. Да се конструира квадрат чии две спротивни темиња лежат на p и q, а едно е во T.*

Решение. Ги воведуваме ознаките $p \equiv 1$, $q \equiv 2$. Нека $\overline{AB}$ биде онаа дијагонала на бараниот квадрат која нема крајна точка во T. A нека лежи на 1, а B на 2. Триаголникот ABT е, значи, правоаглен.

Над точките на рамнината извршуваме една ротација ρ околу T за $+90°$. Претпоставиме дека правите p и q се нумерирани така да $\overline{TA}$ при ρ преѓува во $\overline{TB}$. Во тој случај A се пресликува во B, правата 1 во некоја права 1′, а правата 2 во некоја права 2′. Бидејќи A лежи на 1, лежи неговата слика B на сликата од 1, т. е. на 1′. Значи B лежи освен на 2, како што претпоставивме, уште и на 1′. Пресекот 1′ 2[2]) ни ја дава, спрема тоа, точката B. Со тоа е определена и точката A на 1 така да е $\overline{TA} \perp \overline{TB}$. Над добиената дијагонала AB може да се конструира квадрат, кој претставува едно решение на проблемот.

Ако правите p и q ги пренумерираме, ставувајќи $p \equiv 2$, $q \equiv 1$ (на сликата се ставени овие ознаки во загради), добиваме уште едно решение. Ја добиваме дијагоналата $A_1 B_1$ каде што е $B_1 \equiv (1')(2)$. Над оваа дијагонала конструираме квадрат, кој е второто решение на поставениот проблем.

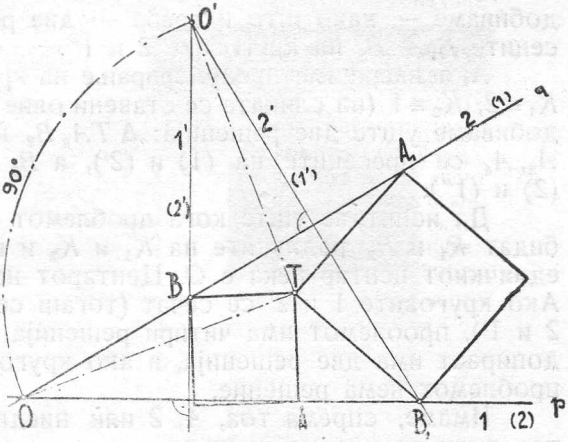
---

[2]) Ако 1 и 2 се ознаки за две криви, ќе ни означува ознаката 12 било кој нивен пресек.

Пресликаните прави 1′, 2′ ќе ги добиеме — во случај правите p и q да не се паралелни — едноставно на тој начин што пресекот O на 1 и 2 ќе го заврти́ме околу T за 90°, со што ќе добиеме O'. А потоа од O' ќе спуштиме нормали на 1 и 2, со што ги добиваме бараните прави 1′ и 2′.

Ако p не е нормална на q, тогаш правите 1′ и 2 како и правите (1′) и (2) секогаш се сечат. Во тој случај постојат две решенија.

Ако е $T \equiv O$ квадратите дегенерираат во точката O, ако p и q не се нормални; а ако е $p \perp q$, постои во овој случај безброј решенија.



Сл. 2

Ако е $p \perp q$, а T не совпаднува со O, тогаш постои едно или ниедно решение според тоа дали T се најдува на една од симетралите на аглите што ги образуваат p и q или не лежи ни на една од нив. Во првиот случај е имено или само парот прави 1′ и 2 или само парот прави (1′) и (2) непаралелен; во вториот случај се паралелни двата пара прави.

3. пример. *Во рамнината се дадени два концентрична круга K_1 и K_2 и една точка T. Да се конструира рамностран триаголник, чие едно теме е во T, едно на K_1 и едно на K_2.*

Решение. Ги воведуваме ознаките $K_1 \equiv 1$, $K_2 \equiv 2$. Дадениот триаголник нека е TAB. A нека лежи на 1, а B на 2. Ја извршуваме ротацијата ρ на рамнината околу T за $+60°$. При тоа круговите 1 и 2 прејдуваат во круговите 1′ одн. 2′. Да претпоставиме дека K_1 и K_2 се нумерирани така што $\overline{TB}$ да прејдува при ρ во $\overline{TA}$. Точката B лежи на 2, затоа нејзината слика A лежи на сликата од 2, т. е. на 2′. Значи A лежи на круговите 1 и 2′. Добивме две решенија за A: пресечните точки A_1 и A_2 на круговите 1 и 2′. Со тоа добиваме и две решенија на поставениот проблем: триаголниците TA_1B_1 и TA_2B_2.

Конструкцијата на триаголниците TA_1B_1 и TA_2B_2 ќе биде попрегледна, ако во рамнината извршиме уште и пресликувањето што е инверзно во однос на ρ, имено ротација околу T за $-60°$. При оваа ротација круговите 1′ и 2′ преј-

дуваат назад во круговите 1 одн. 2, а круговите 1 и 2 во два круга што ќе ги бележиме со 1″ и 2″. Точката A преј-дува во B. Сликата B од A, кој лежи на 1, лежи на сликата 1″ од 1. Значи B лежи освен на 2 и на 1″. На тој начин добиваме — како што и треба — две решенија за B: пресеците B_1 и B_2 на круговите 2 и 1″.

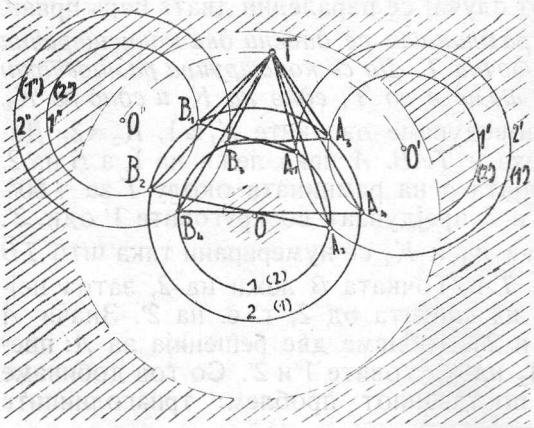
Ако извршиме пренумерирање на круговите, ставувајќи $K_1 \equiv 2$, $K_2 \equiv 1$ (на сликата се ставени овие ознаки во загради), добиваме уште две решенија: $\Delta\, TA_3B_2$ и $\Delta\, TA_4B_4$. При тоа A_3, A_4 се пресеците на (1) и (2′), а B_3 и B_4 пресеците на (2) и (1″).

Да испитаме уште кога проблемот има решение. Нека бидат R_1 и R_2 радиусите на K_1 и K_2 и нека е $R_1 > R_2$. Заедничкиот центар нека е O. Центарот на K_1' и K_2' нека е O'. Ако круговите 1 и 2′ се сечат (тогаш се сечат и круговите 2 и 1′), проблемот има читири решенија, ако тие кругови се допираат има две решенија, а ако круговите не се сечат — проблемот нема решение.

Имаме, спрема тоа, 4, 2 или ниедно решение спрема тоа дали во нееднаквостите

$$R_1 - R_2 \overset{<}{\underset{>}{=}} \overline{OO'} \overset{<}{\underset{>}{=}} R_1 + R_2 \tag{2}$$

важи барем еден од горите, барем еден од средните или барем еден од долните знакови. Бидејќи е $\overline{TO} = \overline{OO'}$, важи:



Сл. 3

Проблемот има 4 решенија ако T е во вратрешноста на прстенот заграден со круговите чии заеднички центар е O, а радиусите им се $R_1 - R_2$ и $R_1 + R_2$; ако T е на контурата на прстенот, имаме 2 решенија; а ако T е надвор од тој прстен (во шрафираната област на цртежот), проблемот нема решенија.

4. пример. *Да се конструира рамностран триаголник чии темиња лежат на три зададени паралелни прави p, q и r.*

Решение. Обележуваме: $p \equiv 1$, $q \equiv 3$, $r \equiv 3$. Нека биде $\Delta A_1 A_2 A_3$ еден од бараните триаголници. A_1, A_2, A_3 нека лежат на 1, 2 одн. 3.

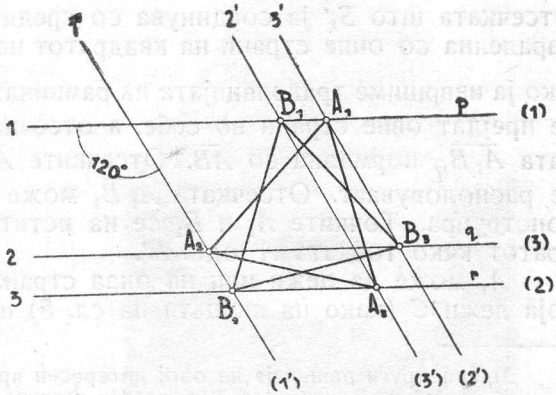
Ако ја извршиме ротацијата ρ на рамнината околу тежиштето T на $\Delta A_1 A_2 A_3$ за $+120°$, тогаш $\Delta A_1 A_2 A_3$ преј-дува сам во себе. Да претпоставиме дека ознаките на правите p, q, r се избрани така што точките A_1, A_2 и A_3 при ρ преј-дуваат во A_2, A_3 одн. A_1. Правите 1, 2, 3 ќе преј-дат во правите 1′, 2′, 3′, што ќе имаат исти меѓусебни растојанија како правите 1, 2, 3, и што со овие прави ќе зафаќаат агли од 120°.

Бидејќи точките A_1, A_2, A_3 лежат на правите 1, 2, одн. 3, тоа иивните слики A_2, A_3, A_1 ќе лежат на пресликаните прави 1′, 2′ одн. 3′. Точките A_2, A_3, A_1 се, значи, пресеците 1′2, 2′3 одн. 3′1. На тој начин добиваме — ако можеме да ги нацртаме правите 1′, 2′, 3′ — едно решение на проблемот: триаголникот $A_1 A_2 A_3$.

Но ако извршиме која да е транслација τ на рамнината паралелно со смерот на p, q, r, преј-дува $\Delta A_1 A_2 A_3$ пак во некој рамностран триаголник со темињата на p, q, r. Значи темето A_2, на пр., може да се избере произволно на 2; а пошто низ A_2 минува правата 1′, тоа и за правата 1′ може да се избере која да е права која со p (и со q, r) зафаќа агол 120°.

Со тоа е добиено едно решение: $\Delta A_1 A_2 A_3$, и тоа без оглед на тоа како ги избравме ознаките 1, 2, 3 за дадените прави, бидејќи секоја од правите 1′, 2′, 3′ ја сече секоја од правите 1, 2, 3. При секој избор на ознаките 1, 2, 3 за правите p, q, r добиваме, значи, по едно решение. Но ако ознаките 1, 2, 3 ги пермутираме циклично, т. е. ако правите ги обележиме по ред место со 1, 2, 3 со 2, 3, 1 или со 3, 1, 2, добиваме истата конструкција како горе.

Ако, напротив, правите ги означиме со 1, 3, 2 место со 1, 2, 3, (новите ознаки на сликата се ставени во загради), ги добиваме на ист начин како горе темињата $B_1 \equiv (1)(3')$, $B_2 \equiv (2)(1')$, $B_3 \equiv (3)(2')$ на уште еден триаголник



Сл. 4

(сл. 4). Истото решение добиваме ако правите ги означиме со 3, 2, 1 или со 2, 1, 3.

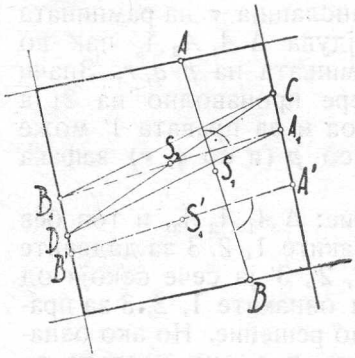
Лесно се покажува дека е

$$\Delta A_1 A_2 A_3 \cong \Delta B_1 B_2 B_3.$$

Постојат, значи, две фамилии складни триаголници кои се решенија на проблемот. Секоја точка на секоја од дадените прави е теме на по еден триаголник од секоја фамилија.

5. пример. *Во рамнината се дадени четири точки A, B, C, D. Да се конструира квадрат чии што страни — или нивните продолженија — минуваат низ A, B, C, D*[3]).

Решение. Ќе разликуваме три случаи според тоа кои од дадените точки A, B, C, D лежат на еден ист пар спротивни страни од бараниот квадрат. На страната на која лежи A ѝ е спротивна а) или она страна на која лежи B б) или онаа страна на која лежи C и в) или онаа на која лежи D.



Сл. 5

Да го разгледаме првиот случај, кога A и B лежат на еден ист пар спротивни страни. Исто важи тогаш и за точките C и D.

Да претпоставиме дека еден од бараните квадрати е нацртан. Рамнината ја завртуваме за 90° околу средиштето на квадратот. Еден пар спротивни страни преј-дува при тоа во друг. Затоа отсечката $\overline{AB}$ преј-дува во една отсечка $\overline{A'B'}$, нормална на $\overline{AB}$, а чии крајни точки A' и B' лежат на оној пар спротивни страни на кои не се A и B. Средината S_1 на $\overline{AB}$ преј-дува во средината S_1' на $\overline{A'B'}$. Отсечката што S_1' ја соединува со средината S_2 на $\overline{CD}$ е паралелна со оние страни на квадратот на кои лежат C и D.

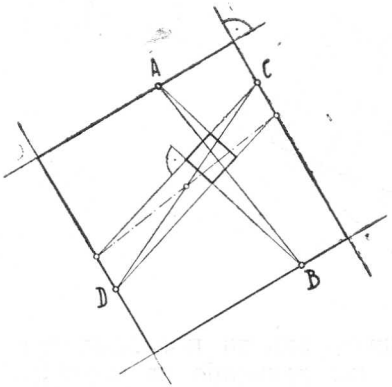
Ако ја извршиме транслацијата на рамнината за вектор $\overrightarrow{S_1' S_2}$, ќе преј-дат овие страни во себе, а отсечката $\overline{A'B'}$ во отсечката $\overline{A_1 B_1}$, нормална со $\overline{AB}$. Отсечките $\overline{A_1 B_1}$ и $\overline{CD}$ заемно се располовуваат. Отсечката $\overline{A_1 B_1}$ може спрема тоа да се конструира. Точките A_1 и B_1 се на истите страни на квадратот како точката A' одн. B'.

A_1 може да лежи или на онаа страна на квадратот на која лежи C (како на скицата на сл. 5) или на онаа на која

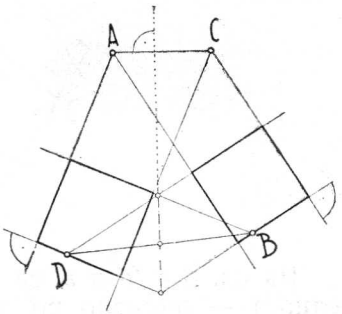
---

[3]) Три други решенија на овој интересен проблем види кај: P. Buchner, *Aus der Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Elemente der Mathematik, Bd. I, № 1. Basel, 1946.

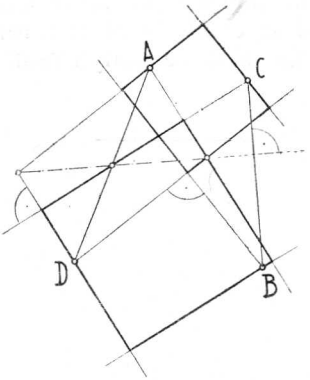
лежи D. Во првиот случај лежи еден пар спротивни страни на еден баран квадрат на правите $A_1 C$ и $B_1 D$. Низ A и B повлекуваме нормали на овие прави. Добиваме еден правоаголник кој е квадрат, бидејќи при завртувањето околу неговиот центар за 90° едниот пар негови спротивни страни прејдува во другиот.



Сл. 6 *а*



Сл. 6 *б*

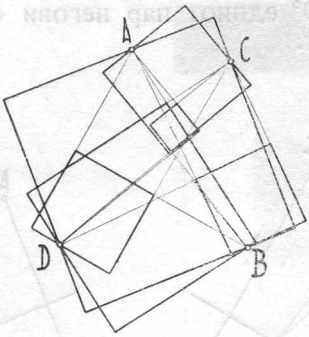


Сл. 6 *в*

Ако A_1 лежи на онаа страна на квадратот на која и D, тогаш како уште едно решение го добиваме квадратот при кој еден пар спротивни страни лежи на правите $A_1 D$ и $B_1 C$.

Конструкцијата е јасна: Низ средината на $\overline{CD}$ ја повлекуваме отсечката $\overline{A_1 B_1}$, нормална на $\overline{AB}$ и еднаква по должина со неа, и тоа така отсечката $\overline{CD}$ да ја располовува. На спротивните страни (и на нивните продолженија) на паралелограмот $A_1 C B_1 D$ лежат по две спротивни страни на два квадрата што се решенија на нашиот проблем.

Во случајот а) имаме значи две решенија. И во секој од случаите б) и в) добиваме на истиот начин по две решенија. Сè на сè проблемот има, значи, ш е с т решенија.



Сл. 7

На сл. 6 *а*, *б* и *в* се дадени — заради поголема прегледност — одделно по две и две решенија за случаите а), б) и в) за истата меѓусебна положба на точките *A*, *B*, *C*, *D*. Тие цртежи треба да си ги замислиме ставени еден на друг така што точките *A*, *B*, *C*, *D* да се поклопат. Тоа е направено на сликата 7, на која се испуштени помошните линии.

Печатница на Филозофскиот факултет · Скопје