ЗА ЕДЕН КРИТЕРИЈ ЗА РАСПОЗНАВАЊЕ НА ТИПОТ НА ПОВРШИНИТЕ ОД ВТОР РЕД

ЈОЖЕ УЛЧАР

Во познатиот учебник по аналитична геометрија од *А. М. Лопшиц*[1]) е допуштена во одделот за афина класификација на површините од втор ред една грешка. Бидејќи учебникот е во употреба делум и кај нас, полевно ќе е да се укаже на тој пропуст и да место еден погрешен критериј за распознавање на некои типови површини од втор ред се изведе правилен критериј.

На стр. 478 во споменатата книга е формулиран овој критериј:

Една равенка

$$(1)\quad f(x_1, x_2, x_3) \equiv \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\, x_i\, x_k + 2\, a_{14}\, x_1 + 2\, a_{24}\, x_2 + 2\, a_{34}\, x_3 + a_{44} = 0,$$

во која што x_i ги толкуваме како произволни афини точкини координати во просторот, претставува во случај кога е

$$\Delta_3 = 0, \quad \Delta_4 = 0$$

цилиндер, и тоа

елиптичен
ако $\Delta_2 > 0$ *кој е: реален, ако* $b_{44} < 0$,
имагинарен, ако $b_{44} > 0$,
распаднат во две имагинарни рамнини што се пресекуваат, ако $b_{44} = 0$;

хиперболичен
ако $\Delta_2 < 0$ *кој е: нераспаднат, ако* $b_{44} \neq 0$,
распаднат во реални рамнини што се сечат, ако $b_{44} = 0$.

При тоа се коефициентите $a_{ik} = a_{ki}$ реални, а

---

[1]) А. М. Лопшиц, *Аналитическая геометрия*, Москва, Учпедгиз, 1948, стр. 478.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

(*)

$$b_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

На еден пример можеме наеднаж да се убедиме дека критериумот е погрешен.

Навистина, за површината

$$x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_1 = 0,$$

која е распадната во рамнините

$$x_1 = 0, \; x_1 + 2\,x_2 + 2 = 0,$$

добиваме $\Delta_2 = -1$, $b_{44} = -1 \neq 0$, што противречи на горниот критериј.

Ќе покажеме сега, употребувајќи го методот применуван во споменатата книга, дека *во формулираниот критериј место изразот* b_{44} *треба да стои во случајот кога е* $\Delta_2 > 0$ *изразот* $a_{11}\,c_{44}$, *а во случајот кога е* $\Delta_2 < 0$ *изразот* c_{44}, каде што е

(**)
$$c_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Равенката (1) на една површина П од втор ред може при претпоставка дека е $a_{11} \neq 0$ да се напише во вид:

$$a_{11}\,f \equiv (a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + a_{14})^2 +$$

$$+ b_{22}\,x_2^2 + b_{33}\,x_3^2 + 2\,b_{23}\,x_2\,x_3 + 2\,b_{24}\,x_2 + 2\,b_{34}\,x_3 + b_{44} = 0,$$

каде што

$$b_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{\;1} & a_{ik} \end{vmatrix}.$$

Преј дувајќи од координатите x_i кон координатите x_i', определени со трансформационите равенки

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}$$
$$x_2' = \qquad\qquad x_2$$
$$x_3' = \qquad\qquad\qquad x_3,$$

равенката на П гласи

$$(2) \qquad x_1'^2 + b_{22}x_2'^2 + b_{33}x_3'^2 + 2b_{23}x_2'x_3' + 2b_{24}x_2' + 2b_{34}x_3' + b_{44} = 0.$$

Приложувајќи ја на изразот

$$\varphi(x_2', x_3') \equiv b_{22}x_2'^2 + b_{33}x_3'^2 + 2b_{23}x_2'x_3' + 2b_{24}x_2' + 2b_{34}x_3' + b_{44},$$

како погоре на f, пак *Gauß*-овата трансформација, добиваме во случајот кога е $b_{22} \neq 0$:

$$(3) \qquad \varphi(x_2', x_3') \equiv \frac{1}{b_{22}}(b_{22}x_2' + b_{23}x_3' + b_{24})^2 + \frac{1}{b_{22}}(c_{33}x_3'^2 + c_{34}x_3' + c_{44}),$$

каде што е

$$c_{ik} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{2k} \\ b_{i2} & b_{ik} \end{vmatrix}.$$

Лесно се проверува точноста на овие идентитети:

$$(4) \qquad a_{11} \cdot c_{33} = a_{11}^2 \Delta_3,$$

и

$$(5) \qquad a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = a_{11}^3 \cdot \Delta_4.$$

Од идентитетот (4), приложувајќи го на $\varphi(x_2', x_3')$, следува,

$$(6) \qquad b_{22} \cdot \begin{vmatrix} c_{33} & c_{34} \\ c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = b_{22}^2 \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix},$$

а од (4), (5) и (6) следува поради $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$ и $a_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$ дека

$$(7) \qquad c_{33} = c_{34} = 0.$$

Во координатната система x_i' равенката на П, на основа (2), (3) и (7), гласи

$$b_{22}\, x_1'^2 + (b_{22}\, x_2' + b_{23}\, x_3' + b_{24})^2 + c_{44} = 0.$$

А бидејќи важи, аналогно на (4), идентитетот

$$a_{11} \cdot c_{44} = a_{11}^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} & a_{44} \end{vmatrix},$$

и $\Delta_2 = b_{22}$, тоа е нашето тврдење за случајот $a_{11} \neq 0$ докажано.

Да го испитаме сега случајот кога $a_{11} = 0$!

Ќе претпоставиме првин да барем еден од коефициентите a_{12} и a_{22} не е нула, и ќе преј̂деме од координатната система x_i во системата y_i, дефинирана со равенките:

$$x_1 = \alpha\, y_1$$

$$x_2 = \quad y_1 + y_2$$

$$x_3 = \qquad\quad y_3.$$

Коефициентот пред y_1^2 во равенката на П е сега $a_{22} + 2\alpha\, a_{12}$. Спрема тоа, секогаш можеме да избереме таков $\alpha \neq 0$ да тој коефициент биде различен од нула. Со тоа проблемот го сведовме на претходниот случај.

Детерминатите Δ_2, Δ_3, Δ_4 и c_{44} преј̂дуваат по трансформацијата во детерминантите $\bar{\Delta}_3$, $\bar{\Delta}_3$, $\bar{\Delta}_4$ и $\bar{c}_{44}$, равни респективно на изразите $\alpha^2 \Delta_2$, $\alpha^2 \Delta_3$, $\alpha^2 \Delta_4$ и $\alpha^2 c_{44}$.

Поради $a_{11} = 0$, е $\Delta_2 = -a_{12}^2 < 0$, затоа и $\bar{\Delta}_2 = \alpha^2 \Delta_2 < 0$. Во критериумот треба, значи, b_{44} да се смени со $\alpha^2 c_{44}$, а поради $\alpha \neq 0$ — со детерминантата c_{44}.

Во овој случај е, спрема тоа, нашиот критериј точен.

Ако пак беше освен $a_{11} = 0$ и $a_{12} = a_{22} = 0$, тогаш би било и $\Delta_2 = 0$. Би имале случај за кој нашиот критериј не кажува ништо.

Со тоа е исправноста на нашата поправка докажана.

Сега можеме нашиот критериј уште нешто да го дополниме.

Бидејќи имено променливите x_1, x_2, x_3 во општата равенка на една површина од втор ред играат наполно симетрични улоги, е јасно дека *во корегираниот критериј детерминантите* Δ_2 *и* c_{44} *и изразот* $a_{11} \cdot c_{44}$ *можат да се заменат респективно со детерминантите*

$$(\overset{*}{\underset{**}{}}) \qquad \Delta_2' = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad c_{44}' = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{i4} \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{k4} \\ a_{4i} & a_{4k} & a_{44} \end{vmatrix}$$

и изразош $a_{ii} \cdot c_{44}'$, каде што за i и k избираме две кои да е различни вредности од 1, 2, 3.

Критериумот ни служи за распознавање типот на површините од втор ред за случај кога е $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$ и кога е барем една од детерминантите Δ_2' различна од нула.

Zusammenfassung

ÜBER EINEN SATZ AUS DER THEORIE DER AFFINEN EINTEILUNG DER FLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG

JOŽE ULČAR

In dem bekannten Lehrbuch der Analytischen Geometrie von Lopschitz[1]) ist im Abchnitte der affinen Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung ein nichtrichtiger Satz formuliert, der hir verbessert wird.

Dort steht nämlich:

Eine Gleichung zweiter Ordnung (1) in affinen räumlichen Punktkoordinaten mit reellen Koeffizienten $a_{ik} = a_{ki}$ stellt im Falle $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$, wo Δ_2, Δ_3, Δ_4 mit (*) definiert sind, einen Zylinder dar, und zwar einen elliptischen oder einen hyperbolischen je nachdem $\Delta_2 > 0$ oder $\Delta_2 < 0$ ist. Dabei ist der elliptische Zylinder reell, imaginär oder in zwei imaginäre nichtparallele Ebenen zerfallen je nachdem b_{44} negativ, positiv oder gleich Null ist; der hyperbolische Zylinder ist aber ein nichtzerfallender oder ein in zwei nichtparallele Ebenen zerfallender je nachdem b_{44} von Null verschieden oder gleich Null ist; dabei ist b_{44} mit (*) gegeben.

An dem Beispiel auf der Seite 4 überzeugt man sich gleich, dass dieser Satz nicht richtig ist. Er wird aber richtig, wie es in dieser Note bewiesen wird, wenn man in seiner Formulierung die Determinante b_{44} im Falle $\Delta_2 > 0$ mit $a_{11} c_{44}$ und im Falle $\Delta_2 < 0$ mit c_{44} vertauscht. Dabei ist c_{44} mit (⁂) definiert.

Der Satz ist aber richtig auch noch im allgemeineren Falle, nämlich dann, wenn man in seiner Formulierung Δ_2, c_{44} und $a_{11} c_{44}$ der Reihe nach mit Δ_2', c_{44}' und $a_{ii}\, \Delta_{44}'$ vertauscht, die mit (∴) defienirt sind und in denen i und k zwei beliebige, aber verschiedene Zahlen von den Zahlen 1, 2, 3 sind.

Das so verbesserte und verallgemeinerte Kriterium dient uns zu entscheiden, von welchem Typus eine Fläche (1) ist, wenn $\Delta_3 = \Delta_4 = 0$ ist und wenn wenigstens eine von den drei möglichen Determinanten Δ_2' von Null verschieden ist.