# ГЕОМЕТРИСКА КОНСТРУКЦИЈА НА ЕДНА КВАДРАТИЧНА КОРЕСПОНДЕНЦА ПОМЕЃУ ПРАВИТЕ ОД ДВЕ РАМНИНИ

ЈОЖЕ УЛЧАР

Познати се разни геометриски конструкции на квадратични кореспонденци меѓу точките од две рамнини, било да тие совпаднуваат или не. Најпознати од нив се конструкциите на *Seydewitz* и *Steiner*, како и двете конструкции на *Reye* (и на други)[1]. Ние тука даваме, во својство на школски пример, една едноставна, изгледа непозната, конструкција меѓу прави од две рамнини.

**1. Дефиниција.** За точките од две рамнини $\pi$ и $\pi'$ кажуваме, како што е познато [2], дека меѓу нив постои една квадратична кореспонденца — или дека точките од $\pi'$ ги добиваме од точките на $\pi$ со помошта на една квадратична трансформација $\omega$, односно точките на $\pi$ од точките на $\pi'$ со нејзе инверзната квадратична трансформација $\omega^{-1}$ — тогаш кога меѓу нивните точки постои една таква обратно-еднозначна алгебарска кореспонденца да на една точка $P$ од $\pi$, ако таа се движи по некоја права, ѝ одговара една точка $P'$ која во $\pi'$ опишува еден конусен пресек. Од тука следува дека на правите од секоја од двете рамнини одговараат во другата рамнина конусни пресеци од една хомалоидална (пунктуална) мрежа [3], а тие прави и конусни пресеци си кореспондираат во една проективност.

За квадратични кореспонденци меѓу прави од две рамнини важат дуални дефиниции и теореми.

Една обратно-еднозначна алгебарска кореспонденца помеѓу правите од две рамнини $\pi$ и $\pi'$ ќе ја викаме, значи, тогаш квадратична (или дека правите од $\pi$ се пресликуваат во правите од $\pi'$, односно обратно, при квадратична трансформација $\Omega$, односно $\Omega^{-1}$) кога на точките (т. е. сно-

---

[1] Види на пр.: *Encyklopädie der Math. Wiss.*, III Bd., S. 2011 ff.

[2] Види на пр.: L. Campedelli, *Lezioni di geometria*, Vol. II, parte 2, p. 233 Padova, 1948.

[3] Термин што одговара на италијанскиот *„reta"*, или на немскиот *„Netz"*.

пови прави) од $\pi$ им одговараат во $\pi'$ криви од втора класа. При оваа кореспонденца на точките (снопови прави) од секоја рамнина одговараат криви од втора класа од една хомалоидална (линиска) мрежа [4] во другата рамнина. Базните прави од тие две мрежи прават исклучок во таа обратна-еднозначност. Земајќи ги тие прави — фундаменталните прави на квадратичната кореспонденца — како страните на координатни тристрани во $\pi$, односно во $\pi'$, тогаш, при згоден избор на единичните прави, меѓу хомогените координати $u_1, u_2, u_3$ на произволната права $p$ од $\pi$ и хомогените координати $u_1', u_2', u_3'$ на нејзе кореспондентната (при $\Omega$) права $p'$ во $\pi'$ постоат релациите

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = u_2 u_3 : u_3 u_1 : u_1 u_2$$

односно, обратно (за $\Omega^{-1}$), релациите

$$u_1 : u_2 : u_3 = u_2' u_3' : u_3' u_1' : u_1' u_2'.$$

**2. Конструкција.** Една вака дефинирана кореспонденца меѓу две рамнини што не совпаднуваат можеме геометриски да ја конструираме на следниот начин.

Рамнините $\pi$ и $\pi'$ нека се допираат до каква да е несингуларна површина од втори ред $\Phi$. Секоја рамнина што се допира до $\Phi$, ја сече рамнината $\pi$ во една права $p$, а рамнината $\pi'$ во една права $p'$. Бидејќи низ секоја права $p$ од $\pi$ може да се положи на $\Phi$ само една тангенцијална рамнина, различна од $\pi$ (и аналогно за $p'$), тоа помеѓу правите $p$ од $\pi$ и правите $p'$ од $\pi'$ се створува на тој начин една обратно-еднозначна (алгебарска) кореспонденца, односно две трансформации, $\Omega$ и $\Omega^{-1}$. Очигледно, на секоја точка $P$ (т. е. сноп прави низ неа) од $\pi$ ѝ одговара (во $\Omega$) една крива од втора класа, имено пресекот на $\pi'$ со тангенцијалните рамнини, спуштени од $P$ на $\Phi$. Трансформацијата $\Omega$ (а значи и $\Omega^{-1}$) е, спрема тоа, една квадратична трансформација.

Фундаменталните прави во $\pi$, односно во $\pi'$, на така конструираната квадратична кореспонденца се правите (генератриси од $\Phi$) $o_2$, $o_3$, односно $o_2'$, $o_3'$, во кои $\pi$, одн. $\pi'$, ја сече $\Phi$, и пресекот $o_1 \equiv o'_1$ на $\pi$ и $\pi'$. Очигледно секоја од правите $o_2$, $o_3$ се сече со по една од правите $o_2'$, $o'_3$ на $o_1 \equiv o_1'$. Нека се ознаките на овие прави избрани така да се пресекуваат $o_2$ и $o'_3$ (значи и правите $o_3$ и $o_2'$). Обележу-

---

[4]) Термин што одговара на италијанскиот „*tessuto*“ или на немскиот „*Gewebe*“.

вајќи ги нивните просечни точки со $O_3 \equiv O'_2$ односно со $O_2 \equiv O_3'$, а допирот на $\pi$, односно $\pi'$, и $\Phi$ со $O_1$, односно со $O'_1$, тогаш на фундаменталните прави

(1) $$O_2 O_3,\ O_3 O_1,\ O_1 O_2$$

од $\pi$ им се асоциирани при трансформацијата $\Omega$ во $\pi$ респективно точките (снопови прави)

(2) $$O_1',\ O_2',\ O_3'.$$

Навистина, секоја од овие точки (2), т. е. сите прави што минат низ неа, се пресликуваат при $\Omega$ во една една од правите (1). Тоа е геометриски евидентно.

Јасно е дека на овој начин не можеме да конструираме најопшта несингуларна квадратична кореспонденца помеѓу правите од две рамнини $\pi$ и $\pi'$, туку само такви при кои што растојанието меѓу кои да е две фундаменталн точки од $\pi$ е еднакво на растојанието на нивните асоциирани фундаменталн точки во $\pi'$.

Ако е $\Phi$ праволиниска површина, тогаш се сите фундаменталн прави реални, а ако $\Phi$ не е праволиниска, тогаш е реална само $o_1 \equiv o_1'$.

Дуалистично одговара на оваа квадратична кореспоненца една квадратична кореспонденца меѓу правите од две звезди [5] чии што центри лежат на една поврвнина од втори ред, и при која што секој пар кореспондентни прави се сече на таа поврвнина. Ако тие две звезди уште ги сечеме со по една рамнина, добиваме за квадратичната кореспонденца меѓу точките од тие две рамнини што на тој начин се ствара познатата конструкција на *Battaglini* и *Reye* [1].

**3. Еден специјален случај.** Да споменеме оној специјален случај на оваа конструкција каде што $\Phi$ е топка со радиус $R$, и каде што $\pi$ и $\pi'$ се паралелни. Тогаш $O_2 \equiv O_2'$ и $O_3 \equiv O_2'$ паѓаат во апсолутно-кружните точки од $\pi$ (и од $\pi'$). Ако по извршување на конструкцијата на нашата кореспонденца рамнината $\pi'$ ја положиме во рамнината $\pi$, и тоа така да $O_1$ совпадне со $O_1'$ и без да извршиме при тоа некое завртување на $\pi'$, тогаш за $\Omega$ добиваме едно пресликување, дуално на „инверзијата“, а кое геометриски е окарактеризирано со тоа што производот од растојанијата на секоја права и нејзе кореспондентната права од една фиксна точка ($O_1$) е константен, што тие прави се паралелни

[5] термин што одговара на италијанскиот „*stella*“, или на немскиот „*Bündel*“.

и на иста страна на таа точка. Ако имено во $\pi$ и $\pi'$ избираме по една таква правоагла координатна система што координатните оски им се паралелни, а почетокот да им совпадне со $O_1$, односно со $O_1'$, тогаш меѓу нехомогените координати $u$, $v$ на произволна права од $\pi$ и координатите $u'$, $v'$ на нејзе кореспондентната права во $\pi'$ $(\equiv \pi)$ постоат релациите

$$u' = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{u}{u^2 + v^2}$$

$$v' = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{v}{u^2 + v^2},$$

од каде што наведнаш се верификува горе кажаното.

---

*Auszug*

## GEOMETRISCHE KONSTRUKTION EINER QUADRATISCHEN KORRESPONDENZ ZWISCHEN GERADEN VON ZWEI EBENEN

JOŽE ULČAR

Wir geben hier eine einfache geometrische Konstruktion einer quadratischen Korrespondenz zwischen Geraden von zwei nicht zusammenfallenden Ebenen, die uns unbekannt zu sein erscheint, und die als Schulbeispiel von Interesse sein könnte.

Man beweist geometrisch leicht, daß die Korrespondenz, die zwischen den Geraden $g$ und $g'$ von zwei Ebenen $\pi$, bzw. $\pi'$, besteht, wo $g$, bzw. $g'$, die Schnittgeraden von $\pi$, bzw. $\pi'$, mit einer beweglichen Tangentialebene einer beliebigen, die Ebenen $\pi$ und $\pi'$ berührenden nichtsingulären Fläche von zweiter Ordnung $\Phi$ sind, quadratisch ist. Die Schnittgerade von $\pi$ und $\pi'$ und die Schnittgeraden von $\Phi$ mit $\pi$, bzw. $\pi'$, sind die Fundamentalgeraden der Korrespondenz in $\pi$ bzw. $\pi'$.

Dualistisch entspricht dieser Konstruktion eine quadratische Korrespondenz zwischen Geraden von zwei Bündeln, dessen Zentren auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, und bei welcher zwei entsprechende Strahlen sich auf dieser Fläche schneiden. Bringt man dann diese Bündeln noch mit je einer Ebene zum Schnitt, so bekommt man für die so entstandene quadratische Transformation zwischen Punkten von diesen Ebenen die bekannte Konstruktion von *Battaglini* und *Reye*[1].