Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите
од Н Р Македонија, кн. 1, 1950
Bulletin de la Société des mathématiciens et des physiciens
de la R. P. de Macédoine, t. 1, 1950

ЕДНА ЗАБЕЛЕШКА ЗА GAUSS-ОВАТА И СРЕДНАТА КРИВИНА КАЈ ЕЛИПТИЧКИ ИСКРИВЕНИ ПЛОСКОСТИ

ЈОЖЕ УЛЧАР

Во наставата по диференциална геометрија е корисно на поважни воведувани поими да се дадат понекаде и геометриски толкувања. За таа цел даваме во овој труд по едно геометриско толкување на средната и Gauß-овата кривина за случај на елиптички точки.

1. Една позната релација[1]) што ни дава врска меѓу торсијата и должината на лакот и на тетивата кај просторните криви, ни даде идеја да испитаме какви аналогни релации важат за кривините кај плоскостите — аналогни во тоа што место кривината на криви ги испитуваме кривините на плоскости, а место должините на лакот и на тетивата ја испитуваме површината[2]) на делот од плоскоста што од неа ја отсекува некоја рамнина и површината на пресечната фигура на плоскоста и таа рамнина.

Јасно е дека при ова иследување доаѓаат предвид само елиптички точки на плоскоста за да биде нејзиниот пресек со рамнината затворена крива.

2. Да се опитаме прво на еден пример!

Најпрости за испитување се кривините во темето M на параболоидот

$$(1) \qquad \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = 2z, \quad R_1 > 0, \; R_2 > 0,$$

кај кој тангециалната рамнина во M е xy-рамнината, а нормалата во M е z-оската.

Рамнината $z = d$ го пресекува параболоидот во елипса што ѝ е површината

---

[1]) Види на пр.: Rudolf Rothe, Differentialgeometrie I, стр. 72, формулата (170); Berlin 1944.

[2]) Терминот плоскост е употребен во онаа смисла како на пр. немскиот die Fläche, а површина како немскиот der Flächeninhalt.

$$(2) \qquad p = 2\pi d \sqrt{R_1 R_2},$$

а самиот параболоид го пресекува на два дела, од кои оној на кој што лежи темето M нека има површина P.

Преминувајќи од x, y-координати на r, φ-координати, дефинирани со равенките

$$x = \sqrt{R_1}\, r \cos\varphi$$

$$y = \sqrt{R_2}\, r \sin\varphi,$$

добиваме за површината P

$$(3) \quad P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2d}} \sqrt{1 + \frac{r^2}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{r^2}{R_2}\sin^2\varphi}\, \sqrt{R_1 R_2}\, r\, dr =$$

$$= 2\pi d \sqrt{R_1 R_2} \cdot \left\{ 1 + \frac{d}{4}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \cdots \right\}.$$

Спрема поставената ни задача треба да ги најдеме таквите функции $\varphi(P, p)$ или $\varphi(P, p, d)$ да изразите од видот

$$\lim_{d \to 0} \varphi$$

ни ги дадат кривините од (1) во M.

Но, како од (2) и (3) следува

$$P - p = \frac{\pi}{2} d^2 \sqrt{R_1 R_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \left\{ 1 + d(\cdots) \right\},$$

$$P^2 = 4\pi d^2 R_1 R_2 \cdot \left\{ 1 + d(\cdots) \right\},$$

тоа за кривините

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

ги добиваме релациите

$$\frac{1}{\pi} \lim_{d \to 0} \frac{P-p}{d^2} = \frac{H}{\sqrt{K}} \tag{4}$$

$$4\pi \lim_{d \to 0} \frac{P-p}{p^2} = H.\sqrt{K} \tag{5}$$

одкаде што наведнаж ги добиваме и нашите барани релации

$$\boxed{\begin{aligned} K &= 4\pi^2 . \lim_{d \to 0} \frac{d^2}{P^2} \qquad (6) \\ H &= 2 \lim_{d \to 0} \frac{1}{d} \cdot \frac{P-p}{P} \qquad (7) \end{aligned}}$$

или, поради

$$\lim_{d \to 0} \frac{P}{p} = 1,$$

што лесно се покажува, и

$$\boxed{\begin{aligned} K &= 4\pi^2 \lim_{d \to 0} \frac{d^2}{p^2} \qquad (6') \\ H &= 2 \lim_{d \to 0} \frac{1}{d} \cdot \frac{P-p}{d} \qquad (7') \end{aligned}}$$

3. Добивените резултати (6), (7), (6′) и (7′) не важат само за точката M на специалната плоскост (1), како што покажавме сега, туку за секоја елиптичка точка на произволна плоскост.

Од сите бескрајно многу можни плоскости што минат низ M и што имаат со таа точка еднакви кривини како (1), плоскоста (1) е имено најпроста. Таа е за секоја од нив најпроста оскулаторна плоскост од втора степен за точката M.

Да избереме, при истата координатна $Oxyz$ система како во т. 2, кои да е две од овие плоскости, Π и $\overline{\Pi}$.

Треба да покажеме дека за плоскостите гореспоменатите релации важат. За таа цел плоскостите ги пресекуваме со рамнината $z = d$, која ги сече во кривите l и $\overline{l}$.

Нашето тврдение ќе биде докажано ако покажеме дека за површините P и $\overline{P}$ од оние делови од Π и $\overline{\Pi}$ што се оградени со l односно $\overline{l}$, и за површините p и $\overline{p}$ на фигурите што ги изрезуваат кривите l и $\overline{l}$ од рамнината $z=d$, важат релациите

$$\lim_{d\to 0} \frac{p}{\overline{p}} = 1, \tag{8}$$

$$\lim_{d\to 0} \frac{P}{\overline{P}} = 1 \tag{9}$$

$$\lim_{d\to 0} \frac{P-p}{\overline{P}-\overline{p}} = 1. \tag{10}$$

Доказ:

Равенките во поларни координати на кривите l и $\overline{l}$ нека се

$$r = r(\varphi, d), \quad \overline{r} = \overline{r}(\varphi, d).$$

Тогаш е

$$p = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [r(\varphi, d)]^2 d\varphi, \quad \overline{p} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\overline{r}(\varphi, d)]^2 d\varphi,$$

Бидејќи плоскостите Π и $\overline{\Pi}$ се оскулаторни во M, имаме за сите φ од интервалот $[0, 2\pi]$

$$\lim_{d\to 0} \frac{r(\varphi, d)}{\overline{r}(\varphi, d)} = 1,$$

и затоа, спрема една теорема од анализата[3]), и релацијата (8).

Равенките на плоскостите Π и $\overline{\Pi}$ во картезичните координати, во однос на избраната система $Oxyz$, можат да се запишат во форма

$$z = \frac{1}{2R_1}x^2 + \frac{1}{2R_2}y^2 + a x^3 + b x^2 y + \cdots \tag{11}$$

$$\overline{z} = \frac{1}{2R_1}x^2 + \frac{1}{2R_2}y^2 + \overline{a} x^3 + \overline{b} x^2 y + \cdots. \tag{$\overline{11}$}$$

---

[3]) Види Ј. Улчар, Една теорема од теоријата на границите, стр. 41 од овој Билтен.

Тогаш имаме

$$P=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,\quad \overline{P}=\iint\limits_{\overline{D}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial \overline{z}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \overline{z}}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

каде што интеграционите области D и $\overline{D}$ се определени со проекциите на кривите l и $\overline{l}$ на xy-рамнината.

Бидејќи површините на областите D и $\overline{D}$ се респективно

$$p=\iint\limits_{D}dx\,dy,\quad \overline{p}=\iint\limits_{\overline{D}}dx\,dy,$$

а од (11) и ($\overline{11}$) се покажува дека за областа D (или $\overline{D}$) важи

$$\lim_{d\to 0}\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial x}}=1,\quad \lim_{d\to 0}\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial y}}=1,$$

се добиваат од (8), користејќи ја теоремата за средни вредности на интегрално сметање, и релациите (9) и (10).

Со тоа е покажано дека (7), (7′), (8) и (8′) важат за произволни две елиптички искривени плоскости, а спрема тоа и за сите.

Добиените резултати можат да се запишат и вака

$$\boxed{K=\lim_{d\to 0}\left(\frac{o}{P}\right)^2=\lim_{d\to 0}\left(\frac{o}{p}\right)^2}$$

$$\boxed{H=\lim_{d\to 0}\frac{P-p}{V}},$$

каде што o е обимот на кругот во кој што пресечната рамнина $z=d$ ја сече топката што плоскоста ја допира во

M и центарот ѝ лежи на таа рамнина, а V волуменот на цилиндер со основа p и висина $\frac{d}{2}$.

Ова иследување ни дава како спореден резултат за површината P_i на *Dupin*-овата индикатрикса за елиптички точки, земајќи предвид дека е

$$P_i = \pi \sqrt{R_1 R_2},$$

интересната релација

$$\boxed{P_i = \lim_{d \to 0} \frac{p}{2d}}$$

Auszug

EINE BEMERKUNG ÜBER GAUSSSCHE KRÜMMUNGSMASS UND MITTLERE KRÜMUNG EINER EIFLÄCHE

Von
JOŽE ULČAR

In dieser Arbeit sind für das Gaußsche Krümmungsmaß und für die mittlere Krümmung einer Eifläche je eine geometrische Deutung gegeben.

Eine Ebene E, die im Abstand d parallel zu der Tangentialebene in einem Punkte M einer Eifläche gelegen ist, schneidet von dieser Fläche einen Teil ab, dessen Flächeninhalt P sei. Wenn man den Flächeninhalt der so entstandenen ebenen Schnittfigur mit p bezeichnet, hat man für das Krümmungsmaß K und für die mittlere Krümmung H der Fläche im Punkte M die Beziehungen

$$K = 4\pi^2 \lim_{d \to 0} \left(\frac{d}{P}\right)^2 = 4\pi^2 \lim_{d \to 0} \left(\frac{d}{p}\right)^2$$

$$H = 2 \lim_{d \to 0} \left(\frac{P-p}{P}\right) = 2 \lim_{d \to 0} \frac{1}{d} \frac{P-p}{p},$$

oder auch

$$K = \lim_{d \to 0} \left(\frac{u}{P}\right)^2 = \lim_{d \to 0} \left(\frac{u}{p}\right)^2$$

$$H = \lim_{d \to 0} \frac{P - p}{V}$$

wo u den Umfang des Schmittkreises der Ebene E und der Kugel bedeutet, die den Mittelpunkt auf E hat und die Fläche im M berührt, und V das Volumen des Zylinders mit der Basis p und der Höhe $\frac{d}{2}$ ist.

Das ist zuerst für den Fall des Scheitels M eines elliptischen Parabolids gezeigt und dann bewiesen, daß dasselbe auch für den Berührungspunkt M jeder Fläche gilt, die mit ihm im M eine Berührung von mindestens zweiter Ordnung hat.