ЈОЖЕ УЛЧАР

ЗА ЗНАКОИТЕ НА ПАРЦИЈАЛНИТЕ ИЗВОДИ ОД ЕДНА ФУНКЦИЈА СО ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Во една своја нота[1]*)* V. Bononcini *дава геометриска интерпретација на знакоите на сукцесини изводи од една функција* $y=f(x)$. *Во овој труд даваме едно обопштение на таа интерпретација за случај на една функција* $z=F(x,y)$, *кај која што знакоите на парцијалните изводи* $F_{x^\nu y^\rho}$ *од ист ред се еднакви или се еднакви само кај оние од нив при кои* ρ *(значи и* ν*) има иста парност — користејќи го во битност методот на* Bononcini.

Нека е $z=F(x,y)$ реална функција од реални променливи x и y, дефинирана во областа

$$|x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant a,$$

со парцијални изводи од произволен ред и ги задоволува следните услови:

1. Во точката (x_0,y_0) сите парцијални изводи $F_{x^\nu y^\rho}$ од n-ти ред од функцијата $F(x,y)$ не се нула, а нивните знакои се или

(α) сите еднакви, или

(β) еднакви кај оние од нив при кои ρ (значи и ν) има иста парност;

2. прв нареден од n повисок ред на парцијалните изводи со парност спротивна на n што сите не се нула е $n+2r+1$, а за навните знаци важи оној од условите (α) и (β) како и за изводите од n-ти ред, и

3. највисокиот ред, помал од n, на парцијалните изводи $F_{x^\nu y^\rho}$ кои не сите се нула е m.

Нека да, понатаму, плоскоста

$$\text{(П)} \qquad z_m=F_m(x,y),$$

---

[1]) Vittorio E. Bononcini, *Interpretazione geometrica dei segni delle derivate successive di una funzione $y=f(x)$.* Bolletino della Unione matematica italiana, Serie III, Anno IV, № 3, p. 267, Bologna, 1949.

каде што $F_m(x,y)$ е полином во x и y од m-та степен, има со плоскоста $z=F(x,y)$ во точката $P_0(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ допир од m-ти ред. Плоскоста (П) ќе ја викаме *оскулаторен параболоид од m-ти ред* на дадената плоскост во точката P_0.

При овие претпоставки за околините (A_1), (A_2) и (B_1), (B_2) на точката (x_0, y_0), дефинирани со

$$(A_1) \qquad \delta \geqslant x - x_0 \geqslant 0, \ \delta \geqslant y - y_0 \geqslant 0;$$

$$(A_2) \qquad \delta \geqslant x_0 - x \geqslant 0, \ \delta \geqslant y_0 - y \geqslant 0;$$

$$(B_1) \qquad \delta \geqslant x_0 - x \geqslant 0, \ \delta \geqslant y - y_0 \geqslant 0;$$

$$(B_2) \qquad \delta \geqslant x - x_0 \geqslant 0, \ \delta \geqslant y_0 - y \geqslant 0;$$

при доволно мал $\delta > 0$ за оние два дела Π_{A_1} и Π_{A_2}, односно Π_{B_1} и Π_{B_2}, на оскулаторниот параболоид П чии што проекции на xy-рамнината се областите (A_1), (A_2), односно (B_1), (B_2), важи следната теорема:

Ако F_{x^n} и $F_{x^{n+2r+1}}$, *во случај* (α), *имаат еднакви знаци, тогаш* Π_{A_1} *побргу се оддалечува*[2]) *од плоскоста* $z=F(x,y)$ *во точката* P_0 *отколку* Π_{A_2}. *Ако тие знакови се различни, тогаш* Π_{A_2} *се оддалечува побргу од* Π_{A_1}.

Ако F_{y^n} *и* $F_{y^{n+2r+1}}$,*во случај* (β), *имаат еднакви знаци, тогаш* Π_{B_1} *побргу се оддалечува од плоскоста* $z=F(x,y)$ *во точката* P_0 *отколку* Π_{B_2}. *Ако се тие знакови различни, тогаш* Π_{B_2} *се оддалечува побргу од* Π_{B_1}.

Доказ:

Бидејќи сите парцијални изводи на $F(x,y)$ во (x_0, y_0) до вклучително m-ти ред се равни на соодветните парцијални изводи на $F_m(x,y)$ во таа точка, а спрема претпоставките сите парцијални изводи на $F(x,y)$ во P_0 чии што ред е $m+1$, $m+2$, $m+3, \cdots, n-1$; $n+1$, $n+3$, $n+5, \cdots, n+2r-1$ се нула, а сите парцијални изводи од n-ти и $n+2r+1$-ви ред не се нула, тоа за разликата $F(x,y) - F_m(x,y)$, развивајќи ја во ред на Taylor околу P_0, добиваме

---

[2]) т. е. произволна крива на П се оддалечува од која да е крива на дадената плоскост побргу на онаа страна од кривата што лежи на Π_{A_1}, само ако двете криви имаат во P_0 таква заедничка тангента што проекцијата ѝ паѓа во (A_1) и (A_2).

$$F(x,y) - F_m(x,y) = \sum_{i=0}^{r} \frac{1}{(n+2i)!} \left[\frac{\partial}{\partial x}k + \frac{\partial}{\partial y}l\right]^{(n+2i)} F(x_0, y_0) +$$

(1)

$$+ \frac{1}{(n+2r+1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}k + \frac{\partial}{\partial y}l\right]^{(n+2r+1)} F(x_0, y_0) +$$

$$\frac{1}{(n+2r+2)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}k + \frac{\partial}{\partial y}l\right]^{(n+2r+2)} F(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Извршувајќи ја смената

$$k = \lambda$$

(2)

$$l = \lambda \upsilon$$

добиваме со

$$x = y_0 + k$$

$$y = y_0 + l$$

при променливи λ и υ, за $\upsilon > 0$ токму оние точки од xy-рамнината што им припаѓаат на областа (A_1) (при $\lambda > 0$) и (A_2) (при $\lambda < 0$), а при $\upsilon < 0$ точките од областа (B_1) (при $\lambda < 0$) и од (B_2) (при $\lambda > 0$).

Релацијата (1) след оваа смена може да се напише во вид

$$F(x,y) - F_m(x,y) = \frac{\lambda^n}{n!}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\upsilon\right]^{(n)} F(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\lambda^2)\right\} +$$

$$+ \frac{\lambda^{n+2r+1}}{(n+2r+1)!}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\upsilon\right]^{(n+2r+1)} F(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\lambda)\right\},$$

каде што $\varepsilon_1(\lambda^2)$ и $\varepsilon_2(\lambda)$ се стремат кон нула при $\lambda \to 0$.

При фиксен υ, а променлив λ, т. е. ако точката (x, y) се движи по правата што мине низ точката (x_0, y_0) и има аглов коефициент υ, двата суманди од десната страна на (3) се стремат кон нула при $\lambda \to 0$, и тоа првиот со ред кој има спротивна парност од n.

При доволно мал λ изразите во големите загради од десната страна на (3) имаат знак на првите суманди во нив, т. е. знак на

(4) $$\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\upsilon\right]^{(n)} F(x_0, y_0),$$

односно на

(5) $$\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\upsilon\right]^{(n+2r+1)} F(x_0, y_0).$$

Коефициентот (4) е во случај (α) при $\upsilon > 0$ позитивен или негативен според тоа да ли n-тите парцијални изводи на $F(x, y)$ во (x_0, y_0) се позитивни или негативни. Аналогно важи за коефициентот (5).

Коефициентот (4) е во случај (β) при $\upsilon < 0$ позитивен или негативен според тоа да ли е

$$F_{x^{n-\rho} y^{\rho}} = (-1)^{\rho} \mid F_{x^{n-\rho} y^{\rho}} \mid$$

или

$$F_{x^{n-\rho} y^{\rho}} = (-1)^{\rho+1} \mid F_{x^{n-\rho} y^{\rho}} \mid$$

при $\rho = 1, 2, 3, \cdots, n$, и аналогно за коефициентот (5).

Ако парцијалните изводи F_{x^n} и $F_{x^{n+2r+1}}$ имаат еднакви знакови, тогаш се во случај (α) или сите парцијални изводи од n-ти и од $n+2r+1$-ви ред позитивни или сите негативни.

Во првиот случај, ако изводите се позитивни, тогаш коефициентите (4) и (5) при $\upsilon > 0$ се позитивни. Затоа за $\lambda > 0$ (областа (A_1)) при доволно мали λ двата суманди од десната страна на (3) имаат знак $+$, додека за $\lambda < 0$ (областа (A_2)) имаат, поради спротивна парност на n и $n+2r+1$, различни знакови, т. е. навистина Π_{A_1} побргу се оддалечува од плоскоста $z = F(x, y)$ во P_0 одошто Π_{A_2}.

Во вториот случај, ако парцијалните изводи се негативни, се негативни и коефициентите (4) и (5). Затоа при доволно мали $\lambda > 0$ (областа (A_1)) двата вопросни суманди се негативни, а при $\lambda < 0$ (областа (A_2)) се со спротивни знаци, од каде што излегува пак истиот заклучок како горе.

Аналогно се покажува исправноста на теоремата и во сите други можни случаи.

При ова изведување испадна од областите (A_1), (A_2) и од (B_1) (B_2) правата $x = x_0$. Но покажаното важи и за неа, во што се убедуваме ако место смената (2) ја извршиме смената

$$k = \lambda\upsilon$$

$$l = \lambda .$$

При $y = \text{const.}$ ни ги дава докажаната теорема за функцијата $F(x, y) \equiv f(x)$ резултатите на Bononcini.

Освен докажаната теорема може да се покаже, земајќи ги предвид знакоите на разликата $F(x,y) - F_m(x,y)$ во сите можни случаи, дека важат и следните теореми:

I. Π_{A_1} *и* Π_{A_2} *во случајот* (α), *а* Π_{B_1} *и* Π_{B_2} *во случајот* (β), *се на иста или спротивна страна од плоскоста* $z = F(x,y)$ *според тоа да ли* n *е парен или непарен број.*

II. Ако знакоите на F_{x^n} *и* $F_{x^{n+2r+1}}$ *(или на* F_{y^n} *и* $F_{y^{n+2r+1}}$*) се еднакви, тогаш онаа од двете плоскости* Π_{A_1} *и* Π_{A_2}*, односно од* Π_{B_1} *и* Π_{B_2}*, која побргу се оддалечува од плоскоста* $z = F(x,y)$ *во околината на* P_0 *е „п о д" или „н а д" таа плоскост според тоа да ли тие знакови се + или –.*

Ако знакоите на F_{x^n} *и* $F_{x^{n+2r+1}}$ *(или на* F_{y^n} *и* $F_{y^{n+2r+1}}$*) се различни, тогаш вопросната плоскост е „п о д" „или н а д" плоскоста* $z = F(x,y)$ *според тоа да ли* n *е парен или непарен при* $F_{x^n} > 0$ *(или* $F_{y^n} > 0$*), а при* $F_{x^n} < 0$ *(или* $F_{y^n} < 0$*) според тоа да ли* n *е непарен или парен.*

Jože Ulčar

ÜBER DIE VORZEICHEN DER PARTIELLEN ABLEITUNGEN EINER FUNKTION VON ZWEI VERÄNDERLICHEN

(Auszug)

In einer Note gibt Vittorio E. Bononcini eine geometrische Deutung der Vorzeichen von Ableitungen einer Funktion $y = f(x)$[1]. Hier wird eine Verallgemeinerung dieser Deutung für eine Funktion $z = F(x,y)$ gegeben und zwar nur für den Fall, wo die Vorzeichen der partiellen Ableitungen von derselben Ordnung entweder gleich oder wechselweise gleich sind.

Es soll $z = F(x,y)$ eine reele Funktion von der reelen Veränderlichen x und y sein, die in einer Umgebung von $x = x_0, y = y_0$ definiert ist und partielle Ableitungen von beliebiger Ordnung hat, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. Im Punkte (x_0, y_0) sind die partiellen Ableitungen $F_{x^\nu y^\rho}$ von der n-ten Ordnung nicht alle gleich Null; ihre Vorzeichen sind entweder

(α) alle gleich, oder

(β) gleich für gerade ρ und gleich für ungerade ρ;

2. für die Vorzeichen der partiellen Ableitungen deren Ordnung $n+2r+1$ derjenigen niedrigsten Zahl der Folge

$$n+1,\ n+3,\ n+5, \ldots$$

gleich sind für welche nicht alle Ableitungen gleich Null sind, gilt wieder diejenige von den Bedingungen (α) und (β), die für die Ableitungen von der n-ten Ordnung gilt.

Es soll ferner die Fläche

$$\text{(II)} \qquad z_m = F_m(x,y),$$

---

[1]) Siehe [1]) S. 3.

wo $F_m(x,y)$ ein Polynom von der m-ten Ordnung in x un y, und m die höchste Ordnung, kleiner als n, der partiellen Ableitungen $F_{x^\nu\ y^\rho}$, welche nicht alle gleich Null sind mit der Fläche $z = F(x, y)$ im Punkte

$$P_0(x_0, y_0, (F(x_0, y_0)))$$

eine Berührung von der m-ten Ordnung haben.

Dann gilt für die Umgebungen (A_1), (A_2) und (B_1), (B_2) des Punktes (x_0, y_0), definiert mit

$$(A_1) \qquad \delta \geqslant x - x_0 \geqslant 0 \quad \delta \geqslant y - y_0 \geqslant 0$$

$$(A_2) \qquad \delta \geqslant x_0 - x \geqslant 0 \quad \delta \geqslant y_0 - y \geqslant 0$$

$$(B_1) \qquad \delta \geqslant x_0 - x \geqslant 0 \quad \delta \geqslant y - y_0 \geqslant 0$$

$$(B_2) \qquad \delta \geqslant x - x_0 \geqslant 0 \quad \delta \geqslant y_0 - y \geqslant 0$$

bei genügend kleinem $\delta > 0$ für diejenigen Teile Π_{A_1} und Π_{A_2} bzw. Π_{B_1} und Π_{B_2} der Fläche Π, deren Projektionen auf die xy-Ebene die Umgebungen (A_1), (A_2) bzw. (B_1), (B_2) sind, folgender Satz:

Wenn F_{x^n} und $F_{x^{n+2r+1}}$, im Falle (α), gleiche Vorzeichen haben, dann entfernt sich[2] *Π_{A_1} von der Fläche $z = F(x,y)$ im Punkte P_0 schneller als Π_{A_2}. Wenn diese Vorzeichen verschieden sind, dann entfernt sich Π_{A_2} schneller als Π_{A_1}.*

Wenn F_{y^n} und $F_{y^{n+2r+1}}$, im Falle (β), gleiche Vorzeichen haben, dann entfernt sich Π_{B_1} von der Fläche im P_0 schneller als Π_{B_2}. Wenn diese Vorzeichen verschieden sind, dann entfernt sich Π_{B_2} schneller als Π_{B_1}.

Bei $y = \text{const.}$ gibt uns dieser Satz für die Funktion $F(x,y) \equiv f(x)$ die Resultate von B o n o n c i n i.

Bei den gleichen Bedingungen 1. und 2. beweist man leicht auch die folgenden zwei Sätze:

I. Im Falle (α) sind Π_{A_1}, Π_{A_2}, und im Falle (β) Π_{B_1}, Π_{B_2}, auf den gleichen oder verschiedenen Seiten der Fläche $z = F(x,y)$ je nachdem n gerade oder ungerade ist.

II. Wenn die Vorzeichen von F_{x^n} und $F_{x^{n+2r+1}}$ (oder von F_{y^n} und $F_{x^{n+2r+1}}$) gleich sind, dann ist diejenige der beiden Flächen Π_{A_1} und Π_{A_2}, bzw. Π_{B_1} und Π_{B_2}, welche sich von der Fläche $z = F(x,y)$ in der Umgebung vom P_0 schneller entfernt, „u n t e r" oder „ü b e r" dieser Fläche je nachdem diese Vorzechen $+$ oder $-$ sind.

Wenn die Vorzeichen von F_{x^n} und $F_{x^{n+2r+1}}$ (oder von F_{y^n} und $F_{y^{n+2r+1}}$) verschieden sind, dann ist die genannte Fläche „u n t e r" oder „ü b e r" der Fläche $z = F(x,y)$ je nachdem bei $F_{x^n} > 0$ (oder bei $F_{y^n} > 0$) n gerade oder ungerade ist, und bei $F_{x^n} < 0$ (oder bei $F_{y^n} < 0$) je nachdem n ungerade oder gerade ist.

---

[2]) d. h. eine beliebige Kurve auf Π entfernt sich von jeder Kurve auf der gegebenen Fläche schneller auf derjenigen Seite der Kurve, die auf Π_{A_1} liegt, nur wenn die beiden Kurven im P_0 eine solche gemeinsame Tangente haben, daß ihre Projektion in die Umgebungen (A_1) und (A_2) fällt.