SUR LA VALEUR GÉNÉRALISÉE ET LA VALEUR PRINCIPALE DE L'INTÉGRALE IMPROPRE

II.

Dragan S. Dimitrovski

Une condition suffisante pour l'éxistence de la valeur principale de l'intégrale impropre

$$\text{v. p.} \int_{0}^{+\infty} F(x)\,d\,x$$

est

(1) $$z\,F(z) \to 0, \quad |z| = R \to \infty\,, \quad 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi.$$

Mais s'il s'agit de la valeur généralisèe, au sens des définitions données dans les articles [1] et [2], cette condition parait plus que suffisante. Vraiment, nous pouvons démontrer que la condition (1) peut être remplacée par une moins restreignante quant à la fonction $F(z)$:

(2) $$F(z) \to 0, \quad |z| = R \to \infty\,, \quad 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi.$$

On peut montrer la possibilité d'existence des valeurs de l'intégrale impropre sous les conditions (2) en des plusieurs cas non cités dans la litterature.

Théoréme. Soit $F(x)$ une fonction de la variable réelle satisfaisante les conditions suivantes:

1°. $F(z)$ est une fonction analytique univoque de la variable complêxe z dans la region $I_m(z) \geqslant 0$, éxepté

2°. un nombre fini des pôles du rang quelquonque et des singularités essentielles isolées dans la région $I_m(z) > 0$

3° éxepté m pôles de la fonction $f(z)$ se trouvant sur l'axe de x: $I_m(z) = 0$, dans les points $x_1, x_2\, x_3 \ldots, x_m$; étant respectivement du rang $n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots, n_m$.

4° $F(z)$ possède la propriété

$$F(z) \to 0, \quad z \to \infty \text{ sur } |z| = R, \quad 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi.$$

Alors la valeur généralisée de l'intègrale impropre

$$\begin{aligned}(3) \qquad {}^*\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{R_k \to \infty, k=1,\,2 \\ r_{ik} \to 0,\ i=1,\,2,\ldots,m}} \Bigg\{ & \int_{R_1}^{x_1 - r_{11}} f(x)\,dx + \\ & + \int_{x_1 + r_{12}}^{x_2 - r_{21}} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m + r_{m2}}^{R_2} f(x)\,dx \Bigg\}\end{aligned}$$

où le symbole „lim" ici signifie la valeur limite au sens le plus large (s'est-à-dire les limites itérées, les limites spécialisées, les limites suivant les courbes m-dimensionelles etc., ainsi que l'opération ${}^*\!\int$ est multiforme), est comme il suit:

$$\begin{aligned}{}^*\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = {} & 2\pi i \sum_{I_m(z) > 0} \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum_{\nu=0}^{m} \operatorname*{Res}_{z = x_\nu} f(z) - \\ & - \lim_{\substack{r_{\nu k} \to 0 \\ \nu = 1,2,\ldots,m;\ k=1,2}} \sum_{\nu=1}^{m} \operatorname{Res} f(z) \cdot \ln \frac{r_{\nu 2}}{r_{\nu 1}} + \\ & + \lim_{\substack{r_{\nu k} \to 0 \\ \nu = 1,2,\ldots,m;\ k=1,2}} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=2}^{n_m} \frac{B_{\nu k}}{k-1} \left[\frac{(-1)^k}{r_{\nu_1}^{k-1}} + \frac{1}{r_{\nu_2}^{k-1}} \right] + \\ & + i\pi \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) \cdot \lim_{R_1,\,R_2 \to \infty} \ln \frac{R_1}{R_2}\end{aligned}$$

Ici m présente le nombre des pôles x_ν sur l'axe des réels, n_ν est le rang du pôle x_ν, $B_{\nu k}$ est le coéfficient du membre $(z - x_\nu)^{-k}$ du développement de Laurent de la fonction $f(z)$ autour du pôle x_ν, qui est convergeante dans la bague:

$$\min r_{\nu k} < |z - x_\nu| < |x_\nu - \alpha_p|$$

α_p étant la singularité parmi x_i la plus proche au pôle x_ν.

La démonstration de ce théorème se fait d'une façon proche à celle de l'article [2]. L'intégration par contour et le contour élu étant les mêmes, la distinction se parait dans les appréciations des intégrales sur les grands cercles $|z| = R_1$ et $|z| = R_2$. En omettant, à cause de la lisibilité et l'éficacité, la partie technique de la démonstration, le résultat est contenu dans la formule (4).

Illustrons ce résultat par un exemple le plus simple:

La fonction $F(x) = 1/x$ étant donnée, on a $F(z) = 1/z$ et $F(z) \to 0$, $z \to \infty$. On connait que

$$\text{l'intégrale impropre} \int_0^a \frac{dx}{x} \text{ n'existe pas,}$$

$$\text{la valeur principale v. p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \text{ n'existe pas,}$$

$$\text{une autre valeur principale v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = 0,$$

mais la valeur généralisée de l'intégrale impropre peut exister, et s'appuyant sur le théorème démontré ci-dessus, elle est comme il suit:

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{r_1, r_2 \to 0 \\ R_1, R_2 \to \infty}} \ln \frac{R_1 r_1}{R_2 r_2} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] И. Д. Черкасов — Существование обобщенных главных значений расходяхщихя интегралов специального вида. Математички Весник, 1 (16), 1964, св. 4, Београд, p. p. 342—345.

[2] D. Dimitrovski — Sur la valeur généralisée et la valeur principale de l'intégrale impropre. I — ère partie. Godišen Zbornik na Prirodo-matematičkiot fakultet na Univ. vo Skopje, tom 21, 1971, sekcija A. p. 5—12.

Драѓан С. Димиѿровски

ЗА ОБОПШТЕНАТА И ГЛАВНА ВРЕДНОСТ НА НЕСВОЈСВЕНИОТ ИНТЕГРАЛ

Втора нота

Резиме

Вообичаениот во литературата доволен услов (1) за егзистенција на главната вредност на несвојствениот интеграл од специјален вид е пренесуван во литературата автоматски и на обопштените вредности на интегралот ([1], [2]). Во овој труд се покажува дека доволниот услов (1) може да се замени со доволен услов (2), кој што прави помала рестрикција врз изборот на функцијата $F(z)$, кога се работи за несвојствени интеграли во смисол на обопштена вредност. Така се добива нова формула (4) за обопштените вредности на интегралите (3), која што се однесува до една значително поширока класа функции $f(x)$. Трудот претставува засилување на досега познатите формули.