ФАКТОРИЗАЦИЈА НА ЕДНА КЛАСА ПОЛИНОМНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ОПЕРАТОРИ ОД ТРЕТ РЕД

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитривски

1. Нека е даден диференцијалниот трином

$$P(D) = D^3 + 3B_2 D^2 + B_1 D + B_0, \quad D \equiv \frac{d}{dx} \tag{1}$$

каде што $B_i(x)$ $(i = 0, 1, 2)$ се полиноми за чии степени b_i $(i = 0, 1, 2)$ важи

$$b_2 < b_0/6, \quad b_1 < b_0/3. \tag{2}$$

Да претпоставиме дека (1) може да се запише во облик

$$P(D) = (D + A_2)(D^2 + u_1 D + u_0) \tag{3}$$

каде што $A_2(x)$, $u_1(x)$ и $u_0(x$ с исто така полиноми.

Од условот за еднаквост на (1) и (3), наоѓаме

$$A_2 = B_2 + y, \; u_1 = 2B - y,$$

$$u_0 = y^2 - B\;y + y' + B_1 - 2B_2^2 - 2B_2'; \tag{4}$$

$$y^3 + Ay + 3yy' + y'' = \Delta_3, \tag{5}$$

каде што

$$\Delta_3 = B_0 + 2B^3 - B_1 B + 6B_2 B_2' + 2B_2'' - B_1'; \; A = B_1 - 3B_2^2 - 3B_2'. \tag{6}$$

Да би претпоставената факторизација егзистирала, потребно е и доволно да равенката (5) има барем едно полиномно решение. Полиномите S_3 и Q_3 ќе ги определиме како

$$\Delta_3 = S_3^3 + Q_3, \quad S_3 = [\sqrt[3]{\Delta_3}], \tag{7}$$

каде што $[\sqrt[3]{\Delta_3}]$ го претставува полиномниот дел од развојот на $\sqrt[3]{\Delta_3}$ по цели степени од x. При тоа

$$dg\, Q_3 < dg\, S_3^2. \tag{8}$$

Ако важи (2), тогаш равенката (5) може да има [2] полиномни решенија само од степен $m = b_0/3$. Нека е b_0 мултипл од 3. Тогаш, со оглед на (7), равенката (5) гласи

$$y^3 - S^3 + Ay + 3yy' + y'' = Q_3. \tag{5a}$$

Од (2), (6) и (8) следи дека

$$\max\{dg(Ay),\; dg(yy'),\; dg(Q_3)\} < dg\, S^2.$$

Оттука непосредно следи дека равенката (5а) можат да ја задоволат само полиномите $y = \omega_t S_3$, каде што ω_t $(t = 1, 2, 3)$ се корени на равеката $\omega^3 = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Нека важи (2). Тогаш операторот (1) може да се факторизира на облик (3), само ако е b_0 мултипл од 3. Ако факторизацијата е можна, полиномите $A_2(x)$, $u_1(x)$ и $u_0(x)$ се дадени како

$$A_2 = B_2 + \omega_t S_3,\quad u_1 = 2B_2 - \omega_t S_3,$$

$$u_0 = \omega_t^2 S^2{}_3 - B_2 \omega_t S_3 + \omega_t S_3' + B_1 - 2B_2^2 - 2B_2'. \tag{9}$$

Ако b_0 не е мултипл од 3, а (2) важи, тогаш (1) не може да има облик (3).

2. За диференцијалниот бином

$$R(D) = D^2 + u_1 D + u_0, \tag{10}$$

во [1] е даден следниот резултат: Операторот (10) може да има облик

$$R(D) = (D + A_1)(D + A_0),$$

само ако $dg\,\Delta_2 = dg\,[(u_1^2 + 2u_1' - 4u_0) = 2\kappa\ (\kappa = 0, 1, \ldots)$. При тоа полиномите $A_1(x)$ и $A_0(x)$ се определени како

$$A_1 = \frac{1}{2}u_1 \pm \frac{1}{2}S_2,\quad A_0 = \frac{1}{2}u_1 \mp \frac{1}{2}S_2;\quad S_2 = [\sqrt{\Delta^2}]. \tag{11}$$

ТЕОРЕМА 2. Нека важи (2). Тогаш операторот (1) може да има облик

$$P(D) = (D + A_2)(D + A_1)(D + A_0), \tag{12}$$

само ако е b_0 мултипл од 3. Ако (12) е можно, тогаш полиномите $A_i(x)$ $(i = 0, 1, 2)$ се определени со (11) и (9).

Значи, операторот (1) може да се факторизира на обликот (12), на вкупно шест различни начина.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. D. Rainville: Amer. Math. Monthly, 48, 519—521, 1941.
2. M. Bhargava, H. Kaufman: Collect. Math., 17, 135—143, 1965.

Пешар Р. Лазов, Драīан С. Димиīровски

ФАКТОРИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Резюме

В этой работе найдены необходимые условия при которых дифференциальный оператор (1) факторизуется в виде (12). После, если факторизация возможна, выражения для элементарных операторов в (12) определяются в явном виде.