# ЗА ЕДЕН РЕЗУЛТАТ НА M. BHARGAVA И H. KAUFMAN

*Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски*

1. За диференцијалната равенка

$$A(x)\ y' = B_0(x) + y^2, \tag{1}$$

во [1] е даден следниот резултат:

ТЕОРЕМА 1. Нека е $y_1$ решение на равенката (1). Тогаш секое решение на (1) различно од $y_1$, е рационална функција ако и само ако $P(x)$ и функцијата $g(x)$ дефинирана како $\int [P(x)/A(x)]\ dx = g(x)$ се рационални, каде што

$$P(x) = \exp\left(\int \frac{2\,y_1}{A(x)}\,dx\right).$$

Од следниов пример се гледа дека теоремата 1 не точна.

ПРИМЕР 1. Равенката

$$x(x^2 - ln^2 x)\ y' = x(x - ln^2 x) + (x - 1)\, y^2 \tag{2}$$

има едно решение $y_1 = ln\, x$. Очигледно е дека функцијата

$$P = \exp\left(\int \frac{2\,y_1}{A}\,dx\right) = \exp\left(\int \frac{2(x-1)\,ln\,x}{x(x^2 - ln^2 x)}\,dx\right)$$

не е рационална. Меѓутоа равенката (2) има рационално решение: $y = x$.

Теоремата 1 е точна ако се претпостави дека $y_1$ е некое рационално решение на равенката (1). Овој резултат ќе го означиме како теорема 1а.

2. За диференцијалната равенка

$$y' = B_0(x) + B_1(x)\, y + B_2(x)\, y^2, \tag{3}$$

во [1] е даден следниот резултат:

ТЕОРЕМА 2. Доволен услов да сите решенија на равенката (3) бидат рационални, е да важи

$$\frac{1}{B_2}\left[B_0 + \frac{1}{2}\,\frac{B_1'}{B_2} - \frac{B_1}{2B_2}\left(\frac{B_2'}{B_2} + \frac{B_1}{2}\right)\right] = 0. \tag{4}$$

Од следниов пример се гледа дека теоремата 2 не е точна.

ПРИМЕР 2. За равенката $y' = e^{2x} - e^x + 2e^x\, y + y^2$, $B_0 = e^{2x} - e^x$, $B_1 = 2e^x$, $B_2 = 1$, па условот (4) е исполнет. Меѓутоа оваа равенка има нерационално решение: $y = e^x$. Од овој пример се гледа дека теоремата 2 не е точна ниту за $B_2 \equiv 1$. Наместо неа, важи следниот резултат:

ТЕОРЕМА 2а. Нека е $\int B_2\,dx$ рационална функција и нека ва́жи (4). Тогаш сите решенија на равенката (3) се дадени како

$$y+\frac{B_1}{2B_2}=R(x);\quad R(x)\text{-рационална функција.} \tag{5}$$

Доказ: Земајки ја во обзир (4), со смена

$$y=z-\frac{B_1}{2B_2}, \tag{6}$$

равенката (3) преоѓа во

$$(1/B_2)\,z'=z^2. \tag{7}$$

Равенката (7) е од типот на равенки (1). За неа: $A=1/B_2$, $B_0=0$. Истата има едно рационално решение $z_1=0$. Како се $P(x)=e^0=1$ и $g(x)=$ $=\int B_2\,dx$ рационални функции, тоа од теоремата 1а следи дека сите решенија на (7) се рационални. Понатаму, од (6) директно следи (5).

За $B_2\equiv 1$ т.е за диференцијалната равенка

$$y'=B_0(x)+B_1(x)\,y+y^2, \tag{8}$$

важат следните два резлтата:

ПОСЛЕДИЦА 1. Ако важи $B_1^2-2B_1'-4B_0=0$, тогаш сите решенија на равенката (8) се дадени како $y+(1/2)\,B_1=R(x)$; $R(x)$-рационална функција.

ПОСЛЕДИЦА 2. Ако сите решенија на равенката (8) се рационални, тогаш $B_0(x)$ и $B_1(x)$ мораат да бидат рационални функции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. Bhargava, H. Kaufman: Rational solutions of the Riccati equation, Math. Stud., 1972, A 40, 253—256.

*Пешар Р. Лазов, Драіан С. Димиѿровски*

## ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ M. BHARGAVA И H. KAUFMAN

### Резюме

В этой работе найдены условия существования рациональных решений дифференциалньных уравнений (1) и (3). При этом проведена коррекция результатов, полученных в работе [1].