ЗА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД n — ТИ РЕД ИНТЕГРАБИЛНИ СО КВАДРАТУРИ

Пеѿар Р. Лазов, Драіап С. Димиѿровски

1. Во овој труд покажуваме дека решавањето на линеарната диференцијална равенка

$$
\begin{aligned}
f_0\, y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \sum_{\mu=n-j-1}^{n-j} \sum_{i=\mu}^{n-1} \binom{n-1}{i} \binom{i}{\mu} \psi^{[n-1-i]} f_{j+\mu-n+1}^{(i-\mu)} \right\} y^{(n-j)} + \\
+ \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \psi^{[n-1-i]} f_1^{(i)} \right\} y = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

се сведува на решавање на линеарната равенка од прв ред

$$f_0\, y' + f_1\, y = P_{n-2}\, e^{\int f_n\, dx}, \quad (f_0 \neq 0) \tag{2}$$

т.е. на пресметување на квадратури. Притоа f_0, f_1 и f_n се произволни $(n-1)$ пати диференцијабилни функции, $P_{n-2}(x)$-произволен полином од степен $n-2$ кој содржи $n-1$ произволни константи, додека изразите $\psi^{[k]}$ се определени со рекурентните релации

$$\psi^{[k]} = f_n\, \psi^{[k-1]} + (\psi^{[k-1]})', \quad \psi^{[0]} = 1. \tag{3}$$

2. Равенката (2) може да се напише во вид

$$e^{\int f_n\, dx} (f_0\, y' + f_1\, y) = P_{n-2}\,.$$

Ако означиме

$$u = \exp\left(\int f_n\, dx \right), \tag{4}$$

тогаш последната равенка гласи

$$\mathrm{L} \equiv u\, (f_0\, y' + f_1\, y) = P_{n-2}.$$

Ако оваа равенка ја диференцираме $n-1$ пати, добиваме: $\mathrm{L}^{(n-1)} = 0$. Од друга страна добиваме

$$L^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} u^{(n-1-i)} (f_0\, y' + f_1\, y)^{(i)} \qquad \text{т. е.}$$

$$
\begin{aligned}
L^{(n-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \sum_{i=j}^{n-1} \binom{n-1}{i} u^{(n-1-i)} \binom{i}{j} f_0^{(i-j)} \right\} y^{(1+j)} + \\
+ \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \sum_{i=j}^{n-1} \binom{n-1}{i} u^{(n-1-i)} \binom{i}{j} f_1^{(i-j)} \right\} y^{(j)} = 0.
\end{aligned}
\tag{α}
$$

Дефинирајќи ги изводите на изразот (4) како $u^{(k)}=\psi^{]k]}u$, лесно се покажува (3) како и тоа дека изразот (α) всушност го претставува левиот дел од равенката (1) помножен со u. Од начинот на кој ја добивме равенката (1), следи дека нејзниот општ интеграл е даден како

$$(5)\qquad y=\exp\left(-\int\frac{f_1}{f_0}\,dx\right)\left\{c_n+\sum_{k=0}^{n-2}c_{k+1}\int\frac{x^k}{f_0}\exp\left[\int\left(\frac{f_1}{f_0}-f_n\right)dx\right]dx\right\}.$$

ПРИМЕР 1. За $n=3$ излегува дека равенката од трет ред

$$(6)\qquad \begin{aligned} &f_0\,y''' + (2f_3f_0 + 2f_0' + f_1)\,y'' + [(f_3^2+f_3')\,f_0 + 2f_3f_0' + f_0'' + 2f_3f_1 + \\ &+ 2f_1']\,y' + [(f_3^2+f_3')\,f_1 + 2f_3f_1' + f_1'']\,y = 0, \end{aligned}$$

интеграбилна е во затворен облик.

ПРИМЕР 2. Земајќи во равенката (6): $f_0=1$, $f_1=a_1x+a_2$, $f_3=a_3$, доаѓаме до резултатот дека равенката

$$y''' + (ax+b)\,y'' + (\alpha x+\beta)\,y' + (Ax+B)\,y = 0$$

може да се интеграли со квадратури, ако константите a, b, α, β, A и B ги задоволуваат релациите:

$$\alpha\,(3\,\alpha - 4\,ab) = 4a^2\,(\beta - 2a),$$

$$\alpha^2 = 4aA,\quad \alpha^2\,(ab-\alpha) = 4a^3\,(B-\alpha).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. I. A. Šapkarev: Glasnik Mat., Zagreb, 5 (25), 1970. 63-66.

Petar R. Lazov, Dragan S. Dimitrovski

SUR UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES D'ORDRE n RESOLUBLES PAR QUADRATURES

Resumé

Dans cet article, on démontre que l'équation linéaire différentielle d'ordre n (1) peut être intégrée par des quadratures. Sa solution générale est donné par (5).