ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Петар Р. Лазов

1. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$(D)\quad \begin{aligned} A(x)\,y' &= B_0(x) + B_n(x)\,y^n + B_k(x)\,z^k \\ A^*(x)\,z' &= B_0^*(x) + B_n^*(x)\,y^n + B_k^*(x)\,z^k, \quad k, n = 2, 3, 4, \ldots, \end{aligned}$$

где $A(x)$, $A^*(x)$, $B_j(x)$ $(j = 0, n, k)$, $B_j^*(x)$ — полиномы. Через a, a^*, b_j, b_j^* $(j = 0, n, k)$ обозначим степени этих полиномов, а через α, α^*, β_j, β_j^* $(j = 0, n, k)$ коэффициенты членов с этими степенями.

Предположим, что уравнение (D) имеет решение

$$(1)\quad \begin{aligned} y &= c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_0 \\ z &= l_r x^r + l_{r-1} x^{r-1} + \cdots + l_0, \end{aligned}$$

где c_i $(i = \overline{o, m})$ и l_i $(i = \overline{o, r})$ — комплексные константы. Тогда получается

$$\beta_0 x^{b_0} + \cdots + \beta_n c^n{}_m x^{b_n + nm} + \cdots + \beta_k l_r^k x^{b_k + kr} + \\ + \cdots - (m \alpha c_m x^{a+m-1} + \cdots) = 0$$

$$\beta_0^* x^{b_0^*} + \cdots + \beta_n^* c^n{}_m x^{b_n^* + nm} + \cdots + \beta_k^* l_r^k x^{b_k^* + kr} + \\ + \cdots - (r\alpha^* l_r x^{a^* + r - 1} + \cdots) = 0.$$

Чтобы предположенное решение существовало, полиномы на левой стороне последних двух уравнений должны быть тождетсвенно равны нулю. На основании этого легко получить следующий результат:

ТЕОРЕМА 1. Система уравнений (D) может иемть решения вида (1), только тогда, когда

(i) меджу числами, определенными как

$$a + m - 1,\ b_0,\ b_n + nm,\ b_k + kr,$$

существуют хотя бы два между собой равные;

(ii) между числами, определенными как

$$a^* + r - 1,\ b_0^*,\ b_n^* + nm,\ b_k^* + kr,$$

существуют хотя бы два между собой равные.

2. Найдём необходимые и достаточные условия при которых система (D) имеет решение вида (1), предполагая, что числа m и r даются как

$$(2)\qquad m = \frac{b_0 - b_n}{n}, \qquad r = \frac{b_0^* - b_k^*}{k}.$$

Соотношения (2) находятся в согласии с теоремой (1). Точно также предположим, что для чисел a и b_k справедливо

$$a - 1 < \frac{2b_n + (n-2)\, b_0}{n} \tag{3}$$

$$b_k < \frac{1}{n}\, \{b_n + (n-1)\, b_0 - n\, (b_0{}^* - b_k{}^*)\}, \tag{4}$$

а для чисел a^* и $b_n{}^*$

$$a^* - 1 < \frac{2b_k{}^* + (k-2)\, b_0{}^*}{k} \tag{3a}$$

$$b_n{}^* < \frac{1}{k}\, \{b_k{}^* + (k-1)\, b_0{}^* - k\, (b_0 - b_n)\} \tag{4a}$$

Полиномы S и S^* определим как

$$S = \left[\sqrt[n]{-B_0/B_n}\right], \quad S^* = \left[\sqrt[k]{-B_0{}^*/B_k{}^*}\right],$$

А полином Q и Q^* как

$$-B_0 = B_n\, S^n + Q \tag{5}$$

$$-B_0{}^* = B_k{}^*\, (S^*)^k + Q^*. \tag{6}$$

Здесь $\left[\sqrt[n]{-B_0/B_n}\right]$ представляет полиномиальную часть разложения $\sqrt[n]{-B_0(x)/B_n(x)}$ по целым убывающим степеням x. На основании известного результата [1, 2] имеем

$$dg\, Q < b_n + (n-1)\, dg\, S, \tag{7}$$

$$dg\, Q^* < b_k{}^* + (k-1)\, dg\, S^*. \tag{7a}$$

Если (5) и (6) заменим в (D), получается

$$Ay' = -Q + B_n\, (y^n - S^n) + B_k z^k, \tag{8}$$

$$A^* z' = -Q^* + B_k{}^*\, \{z^k - (S^*)^k\} + B_n{}^*\, y^n.$$

Из (3), (4) и (7) легко получается, что

$$\max\, \{dg\, (Ay'),\ dg\, Q,\ dg\, (B_k z^k)\} < dg\, (B_n\, y^{n-1}).$$

Отсюда, таким же образом как и в [1, 2] вытекает, что уравнение (8) может быть удовлетворено только когда

$$(9) \qquad y = \omega_t S,$$

где ω_t $(t = \overline{1, n})$ — корни уравнения $\omega^n = 1$. Точно также уравнение (8 а) может быть удовлетворено только когда

$$(9a) \qquad Z = \Omega_i S^*$$

где Ω_i $(i = \overline{o, k})$ — корни уравнения $\Omega^k = 1$.

Если (9) и (9а) заменим в (8) и (8а), находим

$$(I) \qquad \omega_t S' AB_k{}^* + B_k (B_0{}^* + Q^*) + B_k{}^* Q = 0$$

$$(II) \qquad \Omega_i (S^*)' A^* B_n + B_n{}^* (B_0 + Q) + B_n Q^* = 0.$$

С другой стороны, если выполняются соотношения (I) и (II) тогда с помощью (5) и (6) легко находим, что (9) и (9а) представляют решение системы (D). Значит спрведлива

ТЕОРЕМА 2. Система дифференциальных уравнений (D) имеет решения вида (1) тогда и только тогда, когда для некоторого $1 \leqslant t \leqslant n$ и некоторого $1 \leqslant i \leqslant k$ справедливы соотношения (I) и (II). Причём этими решениями являются только функции (9) и (9а).

ПРИМЕР. Для системы уравнений

$$(x^2 - 2)\ y' = x^6 + 4x - x^2 y^2 - 2 z^3$$

$$(10) \qquad (x^7 + 1)\ z' = x^9 + 1 + x^3 y^2 - x^6 z^3,$$

$$n = 2, k = 3,\ m = 2,\ r = 1,\ S = [\sqrt{(x^6 + 4x)/x^2}] = x^2,\ Q = -4x,$$

$$S^* = [\sqrt[3]{(x^9 + 1)/x^6}] = x,\ Q^* = -1,$$

И соотношения (I) и (II) имеют вид

$$\omega_t (x^2 - 2)\ (-x^6)\ 2x - 2\ (x^9 + 1 - 1) + x^6 .\ 4x$$

$$\Omega_i (x^7 + 1)\ (-x^2) \cdot 1 + x^3 (x^6 + 4x - 4x) - x^2 (-1) = 0.$$

Последние уравнения представляют тождество при $\omega_t = -1$, $\Omega_i = 1$. Значит система (10) имеет решение: $y = -x^2$, $z = x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Г. Орещенко: Дифференц. уравн., 10 (2), 1974, 253—257
2. П. Р. Лазов, Д. С. Димитровски: Годишен Зборник на ПМФ, Кн. 25—26, 1975!76, 93—99, Скопје.

Петар Р. Лазов

ПОЛИНОМНИ РЕШЕНИЈА НА ЕДЕН СИСТЕМ ОД НЕЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Резиме

Во овој труд се најдени потребните и доволни услови под кои системот од диференцијални равенки (D) има решенија од обликот (1).