ЗА ЕДНА ПРИМЕНА НА ABEL-ОВАТА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Петар Р. Лазов, Драган С. Димитровски

Нека е дадена диференцијалната равенка

$$z'' - pz' + qy^3 z = 0 \quad \left(z' = \frac{dz}{dx}, \, z'' = \frac{d^2 z}{dx^2}\right), \tag{1}$$

каде што се $p(x)$, $q(x)$-непрекинати функции на некој интервал, а $y = y(x)$-диференцијабилна функција на тој интервал. Ако функцијата $y = y(x)$ ја дефинираме како решение на равенката

$$y' = qy^3 + y^2 + py, \tag{2}$$

тогаш е очигледен следниот резултат:

СТАВ. Ако функцијата $y = y(x)$ ја задоволува Abel-овата диференцијална равенка (2), тогаш општиот интеграл на равенката (1) е даден како

$$z = e^{-\int y dx}\left\{c_1 + c_2 \int \left[\exp \int (2y + p)\,dx\right] dx\right\},$$

каде што c_1 и c_2 се интеграциони константи.

Ако решавањето на равенката (2) може да се сведе на пресметување на квадратури, тогаш од ставот произлегува дека и равенката (1) е интеграбилна во затворен облик.

1. Нека е исполнето

$$-\left(\frac{1}{3q}\right)' + \frac{1}{3q}\left(p - \frac{2}{9q}\right) = 0 \qquad \text{т. е.} \quad q' + pq - \frac{2}{9} = 0. \tag{3}$$

Решавајќи ја последната равенка по q, наоѓаме

$$q = e^{-\int p dx}\left(A + \frac{2}{9}\int e^{\int p dx} dx\right). \tag{4}$$

Ако важи (3), тогаш равенката (2) има едно решение $y_1 = -1/3q$, па од (4) следи

ПОСЛЕДИЦА 1. Равенките од типот

$$z'' - \frac{f''}{f'} z' - \frac{1}{27}\left(\frac{f'}{A + \frac{2}{9} f}\right)^2 z = 0,$$

каде што е $f = f(x)$-произволна двапати диференцијабилна функција за која важи $f' \neq 0$ и $f \neq \frac{9A}{2}$, а A-константа, интеграбилни се со квадратури; тие имаат едно партикуларно решение $z_1 = \left(f + \frac{9A}{2}\right)^{3/2}$.

Пример 1. Равенката

$$z'' - \frac{9}{9x-1} z' - \frac{3}{x^2}\left(\frac{9x-1}{9x-2}\right)^2 z = 0$$

има едно решение $z_1 = (9x^2 - 2x)^{3/2}$. Овде $A = 0$, $f = 9x^2 - 2x$.

Пример 2. Равенката

$$z'' - \frac{1}{x} z' - \frac{3x^2}{(x^2-1)^2} z = 0$$

има едно решение $z_1 = (x^2 - 1)^{3/2}$. Одве $A = -\frac{2}{9}$, $f = x^2$.

1. а. Кога важи (3), тогаш [1] општото решение на равенката (2) е

$$y = \frac{1}{q}\left[e^{-\frac{1}{9}\int dx/q}\left(B - 2\int \frac{1}{q}\, e^{-\frac{2}{9}\int \frac{dx}{q}} dx\right)^{-1/2} - \frac{1}{3}\right], \tag{5}$$

каде што B е константа. Од (3), (5) и ставот, директно следи

ПОСЛЕДИЦА 2. Равенките од типот

$$z'' + \left(2\frac{f'}{f} - \frac{f''}{f'}\right) z' + \frac{3f'^2}{4f^2}\left(\sqrt{\frac{2f}{2f - \mathrm{B}}} - 1\right)^3 z = 0,$$

кде што е $f = f(x)$—произволна двапати диференцијабилна функција за која важи $f, f' \neq 0$ и $f \neq \frac{B}{2}$, а B-константа, интеграбилни се со квадратури; тие имаат едно партикуларно решение

$$z_1 = \left\{\left(1 + \sqrt{\frac{2f}{2f - B}}\right) \Big/ f\left(1 - \sqrt{\frac{2f}{2f - B}}\right)\right\}^{3/2}.$$

Пример 3. Равенката

$$z'' + \frac{3}{x} z' + \frac{3(x-1)}{x^2(x+1)^2} z = 0$$

има едно решение $z_1 = \{(1 + x)/x\}^3$. Овде $B = -2$, $f = x^2/(1 - x^2)$.

2. Како што е познато [2], равенките од типот (2) (непотполна Абелова равенка) под одредени услови можат да се упростат и решат. Со смена

$$y(x) = u(x)\,\eta(\xi),\ \xi = \int\left(\exp\int p\,dx\right)dx,\ u = \exp\int p\,dx, \tag{6}$$

равенката (2) преоѓа во

(7) $$\eta'(\xi) = g(\xi)\eta^3 + \eta^2, \quad g(\xi) = q\left(\exp \int pdx\right).$$

Понатаму, со смена

(8) $$\xi'(t) = -1/t\,\eta(\xi),$$

равенката (7) преоѓа во облик

(9) $$t^2 \xi''(t) + g(\xi) = 0.$$

Ако од (9) може да се најде $\xi(t)$, тогаш функцијата $\eta(\xi)$ е определена со (8).

2.а. Ако важи $q' + pq = 0$, тогаш од (6), (7), (8) и (9) следи

ПОСЛЕДИЦА 3. Равенките од типот

$$z'' - f'z' - b^2 e^{2f} z = 0,$$

$$z'' - \frac{f''}{f'} z' - b^2 f'^2 z = 0,$$

$$z'' - \frac{f'}{f} z' - b^2 f^2 z = 0$$

интеграбилни се со квадратури; соодветно тие имаат по еден партикуларен интеграл $z_1 = \exp\left(b\int e^f dx\right)$, $z_1 = e^{bf}$, $z_1 = \exp\left(b\int f\,dx\right)$. Овие резултати се најдени во [3], каде е користено поинакво проиѓање.

2.б. Ско важи $g(\xi) = b\xi$ ($b = \text{const.}$), тогаш од (6), (7), (8) и (9) следи

ПОСЛЕДИЦА 4. Равенките од типот

$$z'' - \frac{f''}{f'} z' - \frac{b}{k^3}(f'/f)^2 z = 0,$$

каде што е $f = f(x)$-произволна двапати диференцијабилна функција за која важи $f', f \neq 0$, b-константа ($b \neq 0$), а к-корен на равенката $k^2 - k + b = 0$, интеграбилни се со квадратури; тие имаат едно решение $z_1 = f^{1/k}$.

3. Согласно на резултатот најден во [4], ако важи $q' = a$ ($a = \text{const}$), тогаш со смена $y = u(x)/q$, равенката $y' = qy^3 + y^2$ се сведува на равенка во која променливите можат да се разделат, па од ставот следи

ПОСЛЕДИЦА 5. Равенките од типот

$$z'' + \frac{f^3}{(ax+b)^2} z = 0,$$

каде што функцијата $f = f(x)$ е определена со равенството

$$\int \frac{df}{f^3 + f^2 + af} + c = \frac{1}{a} \ln (ax + b),$$

а a и b-константи ($a \neq 0$), интеграбилни се во затворен олбик; тие имаат едно партикуларно решение $z_1 = \exp\left(-\int \frac{f(x)\,dx}{ax+b}\right)$.

4. На крајот, со користење на резултатот добиен во [5], од ставот се добива следниот резултат:

ПОСЛЕДИЦА 6. Равенките од типот

$$z'' - \frac{f''}{f'} z' - \frac{(u+1)^3}{3} \left(\frac{f'}{a-f}\right)^2 z = 0,$$

каде што е $f = f(x)$-произволна двапати диференцијабилна функција за која важи $f' \neq 0$, $f \neq a$, a-константа, а $u = u(x)$-функција определена со равенството

$$\int \frac{du}{u^3 + 1} = c - \frac{1}{3} \ln (a - f),$$

интеграбилни се во затворен облик; тие имаат еден партикуларен интеграл $z_1 = \exp\left[-\int \frac{(u+1) f'}{a-f}\, dx\right]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Scalizzi; Atti Accad. Lincei, 1917, pp. 60—64.
2. H. Lemke: Sitzungsberichte Berlin. Math. Ges., 1920, pp. 26.
3. J. Zbornik: Zeit. Für angewandte Math. Phys., 1956, pp. 64—70.
4. A. Chiellini: Bollet. Unione Mat. Ital., 1931, pp. 301—307.
5. M. Chini: Rend. Inst. Lombardo, 1924, pp. 506.

Петар Р. Лазов, Драган Д. Димитровски

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Резюме

В этой работе показывается, что известные критерии интегрируемости дифференциального уравнения Абеля могут использоваться для нахождения достаточных условий, при которых некоторые классы линейных дифференциальных уравнений второго порядка интегрируемы с помощью квадратур.