O INKLUZIJI EULER-OVIH I VUČKOVIĆ-EVIH POSTUPAKA ZBIRLJIVOSTI

BRANISLAV MARTIĆ, SARAJEVO

U [2] J. Karamata uvodeći sporo promenljive funkcije dokazuje inkluziju

$$E(\lambda) \subset KS(\lambda), \quad \lambda > 0$$

gde su $E(\lambda)$ Euler-ovi a $KS(\lambda)$ Karamata—Stirling-ovi postupci zbirljivosti.

U [3] B. Martić dokazuje elementarno bez sporo promenljivih funkcija STAV: Ako je niz s_n zbirljiv $E(\lambda)$ postupcima ka vrednosti s onda je on zbirljiv i Vučković-evim σ^α postupcima $(\alpha > -1)$ ka istoj vrednosti. Na kraju rasprave Martić je napomenuo da se istom tehnikom dokaza može dokazati STAV u kome umesto σ^α stoji $KS(\lambda)$.

U ovom članku dokazaćemo inkluziju t. j.

STAV. Za svako $\lambda > 0$ i $\alpha > -1$ je

$$E(\lambda) \subset \sigma^\alpha \tag{1}$$

Za dokaz ovog stava treba nam

Lema. *Niz*

$$s_n = (-1)^n n! \tag{2}$$

je σ^α, $(\alpha > -1)$ zbirljiv ka nuli, a nije $E(\lambda)$, $(\lambda > 0)$ zbirljiv.

Na osnovi [3] i ove leme sledi neposredno (1) tako da samo treba dokazati lemu.

Dokaz LEME. Za $E(\lambda)$ transformaciju niza (2) imamo

$$E(\lambda)\{s_n = (-1)^n n!\} = \frac{1}{(1+\lambda)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \lambda^\nu (-1)^\nu \nu! =$$

$$= \frac{1}{(1+\lambda)^n} \int_0^\infty \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (-\lambda t)^\nu \right\} e^{-t} \, dt = \frac{1}{(1+\lambda)^n} \int_0^\infty (1-\lambda t)^n e^{-t} \, dt =$$

$$= \frac{(-1)^n e^{-1/\lambda}}{(1+\lambda)^n} \left\{ \int_{-1}^{0} a^n e^{-a/\lambda} d\left(\frac{a}{\lambda}\right) + \int_{0}^{\infty} a^n e^{-a/\lambda} d\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^n e^{-1/\lambda}}{(1+\lambda)^n} \left\{ \left[\int_{-1}^{0} a^n e^{-a/\lambda} d\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right] + \lambda^n n! \right\} \longrightarrow \infty, \; n \longrightarrow \infty \tag{3}$$

a za njegovu σ^α transformaciju je

$$\sigma^\alpha \{ s_n = (-1)^n n! \} = \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha) (-1)^\nu \nu! =$$

$$= \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n} (\alpha+\nu)} \int_0^\infty \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha)(-t)^\nu \right\} e^{-t} dt = \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha+\nu)} \int_0^\infty e^{-t} \prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha - t + \nu)\, dt \tag{4}$$

jer je prema definiciji [4] $\prod_{\nu=0}^{n-1} (x+\alpha+\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu^n(\alpha) x^\nu$.

Za integral

$$J = \int_0^\infty e^{-t} \prod_{\nu=1}^{n-1} (\alpha - t + \nu)\; dt$$

imamo

$$J = e^{-\alpha} \int_{-\alpha}^{\infty} e^{-u} \prod_{\nu=0}^{n-1} (-u+\nu)\, du = e^{-\alpha} \left\{ \int_{-\alpha}^{0} + \int_{0}^{n-1} + \int_{n-1}^{\infty} \right\} \tag{5}$$

pa je redom

$$\left| \int_{-\alpha}^{0} e^{-u} \prod_{\nu=0}^{n-1} (-u+\nu)\, du \right| = \left| \int_{0}^{\alpha} e^{u} \prod_{\nu=0}^{n-1} (u+\nu)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha e^\alpha \prod_{\nu=0}^{n-1} (\alpha+\nu) \tag{6}$$

ako je $\alpha > 0$ (a za $\alpha < 0$ stavljajući $\alpha = -a$, $a > o$ dobivamo istu procenu

$$\left|\int_{-\alpha}^{0}\right| = O\{\Gamma(\alpha+n)\}, n\to\infty)$$

$$\left|\int_0^{n-1} e^{-u}\prod_{\nu=0}^{n-1}(-u+\nu)\,du\right| \leqslant \int_0^{n-1} e^{-u}\left|\prod_{\nu=0}^{n-1}(-u+\nu)\right| du =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}\int_k^{k+1} e^{-u}\left|\prod_{\nu=0}^{n-1}(-u+\nu)\right| du \leqslant (n-1)!\int_0^{n-1} u e^{-u}\,du =$$

$$= O\{(n-1)!\},\ n\to\infty \tag{7}$$

i

$$\left|\int_{n-1}^{\infty} e^{-u}\prod_{\nu=0}^{n-1}(-u+\nu)\,du\right| \leqslant \int_{n-1}^{\infty} e^{-u}\prod_{\nu=0}^{n-1}(u-\nu)\,du =$$

$$= e^{-n+1}\int_0^{\infty} e^{-t}\prod_{\nu=0}^{n-1}(t+\nu)\,dt = e^{-n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} e^{-t}\prod_{\nu=0}^{n-1}(t+\nu)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-n+1}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k}\prod_{\nu=1}^{n}(k+\nu) = e^{-n+1}\,n!\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{n} e^{-k} =$$

$$= e^{-n+1}\,n!\,(1-e^{-1})^{-n-1} = O\left\{n!\,(e-1)^{-n}\right\},\ n\to\infty \tag{8}$$

Prema (4), (5), (6), (7) i (8) vidimo da je

$$\sigma^{\alpha}\{s_n=(-1)^n n!\} = O\left\{\frac{\Gamma(\alpha+n)+(n-1)!+n!\,(e-1)^{-n}}{\Gamma(\alpha+n+1)}\right\}\to 0,\ n\to\infty \tag{9}$$

što je i trebalo dokazati. S obzirom na (3) i (9) lema je dokazana.

Primetimo da smo direktno dokazali da niz (2) nije $E(\lambda)$ zbirljiv. To bi se moglo pokazati i indirektno s obzirom da je red veličine $E(\lambda)$ zbirljivih nizova s_n [1]

$$s_n = o\left\{\left(\frac{2}{\lambda}+1\right)^n\right\},\ n\to\infty$$

LITERATURA

[1] G. H. HARDY — Divergent Series. Oxford 1949.

[2] J. KARAMATA — Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d' autres sommabilités s'y rattachant. Mathematica Cluj 9 (1935).

[3] B. MARTIĆ — Relation between σ^α, $KS(\lambda)$ and the Euler-Knopp Methods of Summation. Glasnik Mat. fiz. i astr. broj 1—2 Zagreb 1961.

[4] V. VUČKOVIĆ — Eine neue Klasse von Polinomen und ihre Anwendung in der Theory der Limitierungs verfahren. Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 12 (1958).

Branislav Martić, Sarajevo

SUR L'INCLUSION DE LA SOMMABILITÉ D'EULER ET DE VUČKOVIĆ

(Résumé)

Dans cette note nous avons établi le théorème suivant

On a

$$E(\lambda) \subset \sigma^\alpha, \quad \lambda > 0, \ \alpha > -1; \tag{1}$$

c'est — à — dire toute suite sommable $E(\lambda)$ (Euler) est de même sommable σ^α (Vučković) avec la même somme; l'inverse n'ayant pas lieu.

Pour démontrer ce théorème nous avons établi un lemme. Dans ce lemme nous notons qu'il existe toujours une suite s_n (2) sommable σ^α ($\alpha > -1$) et qui n'est pas sommable $E(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Avec le théorème (1) dans (3) et ce lemme on déduit l'affirmation (1).