ВАРИЈАНТЕ ДОКАЗА НЕКИХ СТАВОВА КЛАСИЧНЕ АНАЛИЗЕ

Јован В. Малешевић

(Саопштено на V Конгресу МФА Југославије,
Охрид: 14 — 19. септембар 1970. г.)

У овом раду дате су леме 1 и 2 које могу бити од интереса, посебно лема 2 која садржи II теорему L'Hospital-a. На крају је дат један облик остатка формуле Taylor-a који такође може да користи кад се $|f^{(n-1)}(b)-f^{(n-1)}(a)|$ лако оцењује, а тражи се мања прецизност у оцени грешке.

1°. *Лема 1.* Важе неједнакости

$$(\alpha) \qquad 1+\frac{k}{n}+\frac{(k-1)^2}{n^2}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^k; \qquad 1\leqslant k\leqslant n \quad (\forall n)$$

и

$$(\beta) \qquad \frac{n+1}{n+1-k}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^k; \qquad 0\leqslant k\leqslant n \quad (n\geqslant 2)$$

Доказ. Неједнакост (α) се доказује идентично доказу познате неједнакости [1]:

$$(\gamma) \qquad 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^k; \qquad 1\leqslant k\leqslant n \quad (\forall n)$$

(индукцијом по k) и у односу на неједнакост (8) неједнакост (α) би била њено појачање.

За $k=0, 1, 2$ лако се проверава неједнакост (β), (за $k=n$ она је евидентна). Усвајајући неједнакост (β) имамо

$$\frac{n+1}{n-k}=\frac{n+1}{n+1-k}\,\frac{n+1-k}{n-k}\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\frac{n+1-k}{n-k}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n-k}\right)\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}$$

па се доказ формуле (β) индукцијом по k завршава.

Горње формуле могу бити од интереса при доказу ограничености и монотоније низа $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ изводећи их чисто преко индуктивних формула. Тако из (α) за $k=n$ имамо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3-\frac{2n-1}{n^2}, \quad \forall n$$

одакле следује и ограниченост низа са горње стране; док из (β) следује $\left(\text{умношком са } \binom{n}{k}\right)$:

$$\binom{n+1}{k} \geqslant \frac{(n+1)}{n^k}\binom{n}{k} \Rightarrow \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \geqslant \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

па је коначно

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n; \quad n \geqslant 2$$

тј. поменути низ је и растући.

2°. *Лема 2.* Нека функције $f(x)$ и $\varphi(x)$ задовољавају ове услове:

1) $f(x)$ неограничена кад $x \to a$, и $\lim\limits_{x\to a} |\varphi(x)| = +\infty$

2) Егзистирају коначни изводи $f'(x)$ и $\varphi'(x) \neq 0$ за $0<|x-a|<\delta$.

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$

Тада важи

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$$

Доказ. Размотримо случај $\lim\limits_{x\to a+} \varphi(x) = +\infty$, чиме се не губи у општости; тада је $\varphi(x)>0$ за $a<x<a+\delta$. По претпоставци 3) имамо:

$$\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-A\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{за } a<x\leqslant x_0<a+\delta$$

Сем тога је $\left|\dfrac{C}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ за $a<x\leqslant x_1<x_0$, јер по претпоставци 1) $\varphi(x) \underset{x\to a+}{\to} +\infty$.

Отуда

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}-A\right|=\left|\frac{f(x)-A\varphi(x)+A\varphi(x_0)-A\varphi(x_0)}{\varphi(x)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}-A\right|+\left|\frac{f(x_0)-A\varphi(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}\right|$$

$$=\left|\frac{f'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}-A\right|+\left|\frac{C}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}\right|<\varepsilon,\ a<x\leqslant x_1$$

што је и требало показати.

Поступак за случај леве околине броја a је аналоган горњем поступку.

За $A=\infty$ и околину тачке a у којој је следује да је

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right|>\frac{1}{2}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}+\frac{f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}\right|$$

одакле се једноставно долази до резултата и у овом случају.

Приметимо да се према доказу, претпоставка за функцију $f(x)$ дата под 1) може и изоставити.

У горњој леми је садржана *друга теорема L'Hospital-a*, јер функција бесконачно велика у тачки a је и локално неограничена у тачки a. Наиме формулација II теореме L'Hospital-a гласи [2]:

Нека је:

1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a}|\varphi(x)|=+\infty$

2) Егзистирају коначни изводи $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ и $\varphi'(x)\neq 0$ за $0<|x-a|<\delta$.

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A\ (\leqq\infty)$

Тада важи

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

(Доказ за случај кад је $A=\infty$ се лако своди на случај $A=\text{konst.}$ па се за доказ II теореме L'Hospital-a може користити само први део леме).

3°. *Један облик остатка формуле Taylor-а.* Нека су функције $F(x)$ и $\varphi(x)$:

1) непрекидне на сегменту $[a, b]$, и

2) имају изводе у интервалу (a,b).

На пример из формуле Cauchy-а [3]:

$$F(b) = F(a) + \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} F'(\xi)$$

уз претпоставку да је $\varphi'(x) \neq 0$ за $x \in (a, b)$; спецификацијом фунције $F(x)$ са

$$F(x) = f(x) + \sum_{k=2}^{n} \frac{(b-x)^{k-2}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x)$$

(где се за функцију $f(x)$ претпоставља, имајући у виду претпоставке 1) и 2), непрекидност извода до закључно $(n-1)$ — ог реда на сегменту $[a, b]$ и егзистенција n-тог извода у интервалу (a, b)) што имплицира релације:

$$F(b) = f(b)$$

$$F(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}_{(a)} \quad \left(f^{(0)}_{(a)} \equiv f(a)\right)$$

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)$$

добија се да је

$$f(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}_{(a)} + \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}$$

тј. формула Taylor-а са остатком

$$(*) \qquad R_n = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi)$$

и тих остатака има колико и избора функције $\varphi(x)$ која задовољава наведене услове*)

---

*) Уз претпоставку непрекидности функције $\varphi'(x)$ на интервалу (a, b) (и $\varphi'(x) \neq 0$) имамо континуум таквих остатака.

Schlömilch-ovi остатци

$$R_n = \frac{(b-a)^p}{p\,(b-\xi)^{p-1}} \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi)$$

који настају из (*) при избору $\varphi(x) = (b-x)^p$, $p \in N$: уз претпоставку да је n-ти извод ограничен у околини тачке a, омогућавају формули Taylor-а реалну примену (специјално остатак Lagrange-a).

Међутим при избору $\varphi(x) = f^{(n-1)}(x)$ имамо

$$\varphi(b) - \varphi(a) = f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)$$

$$\varphi'(\xi) = f^{(n)}(\xi)$$

па уз претпоставку ограничености n-тог извода фунције $f(x)$ на интервалу (a, b) и $f^{(n)}(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$; остатак (*) имплицира остатак облика

$$({}_*{}^*{}_*) \qquad R_n = \frac{f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-\xi)^{n-1}$$

(који задржава „ξ-binom" али губи чинилац $f^{(n)}(\xi)$ и за њега имамо

$$|R_n| \leqslant \frac{|f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)|}{(n-1)!} |b-a|^{n-1}$$

одакле следује

$$R_n = 0\,[(b-a)^{n-1}]$$

што је слабије од

$$R_n = 0\,[(b-a)^{n-1}]$$

за случај Lagrange-овог облика. Међутим и облик остатка $({}_*{}^*{}_*)$ може да користи кад се $|f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(a)|$ лако оцењује а тражи се мања прецизност у оцени грешке.

Пример. Функцију

$$f(x) = x^2 \ln|x|$$

апроксимирати Taylor-овим полиномом трећег степена у околини тачке $x = -1$ и оценити грешку за $|x+1| \leqslant 0,\ 1$ по остатку $({}_*{}^*{}_*)$.

Решење. Имамо

$$x^2 \ln|x| = -(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + R_4$$

где је

$$|R_4| < \frac{\frac{2}{x}+2}{3!}|x+1|^3 = \frac{1}{3}\frac{|x+1|^4}{|x|} < \frac{1}{27}\cdot 10^{-3}$$

(Lagrange-ов облик остатка даје $|R_4| < \frac{1}{9}\cdot 10^{-4}$).

ЛИТЕРАТУРА

[1]. А. М. Яглом и И. М. Яглом: Вероятность и информация, (стр. 152). Москва 1957.

[2]. Г. М. Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I (стр. 220—321), Москва 1962.

[3]. Р. Кашанин: Виша математика I (стр. 505—506), Сарајево 1969.

ВАРИАНТЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ КЛАССИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Јован В. Малешевић

(СОДЕРЖАНИЕ)

В этой работе автор дал леммu 1, 2 которые могут быть интересным, особенно лемма 2, в которой содержается вторая теорема L'Hospital-а.

На конце работы автор дал один вид остаточного члена формулы Taylor-а каторый также может быть, в известных случаях, целесообразным.