# ПОТРЕБАН И ДОВОЉАН УСЛОВ КОМУТАТИВНОСТИ ТЕЛА КАРАКТЕРИСТИКЕ $p$

ЧАСЛАВ В. СТАНОЈЕВИЋ (БЕОГРАД)

1. Од Јакобсона [1] потиче довољан услов комутативности за прстен $R$: *ако за свако* $a \in R$ *постоји* $n(a)$ *тако да је*

$$a^{n(a)} = a, \tag{1.1}$$

$R$ *је комутативни прстен.* За неке специјалне класе прстена тај је услов потребан. Хернштајн [2] уопштава услов (1.1) на тај начин што захтева да (1.1) важи само за комутаторе

$$(xy - yx)^{n(x,y)} = xy - yx. \tag{1.2}$$

Е. Артин [3] за тело $T_2$ карактеристике 2 даје услов

$$x^2 \in Z, \tag{1.3}$$

где је $Z$ центар тела $T_2$.

2. Овде ће за једну класу тела $Tp$ карактеристике $p$ бити формулисан потребан и довољан услов за комутативност.

Нека је функција

$$f(x) = x^p$$

дефинисана за свако $x \in Tp$. Класу тела $Tp$ на коме је $f(x)$ линеарна функција,

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{L}$$

означићемо $L\,Tp$.

**Став.** Услов

$$(x+y)^p = x^p + y^p, \qquad \forall\, x, y \in Tp, \tag{L}$$

је потребан и довољан за комутативност тела $Tp$. Потребност је позната чињеница [4].

Пре доказа довољности услова $(L)$ доказаћемо две леме

**Лема 1.** У телу $L\,Tp$ је

$$x^p y = y x^p \qquad \forall\, x, y \in Tp. \tag{2.1}$$

**Доказ.** Из

$$(x+y)^p = x^p + S_{\overline{p-1}\,1} + \cdots + S_{1\,\overline{p-1}} + y^p,$$

где је

$$S_{\overline{p-1}\,1} = x^{p-1}y + x^{p-2}yx + \cdots + yx^{p-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{1\,\overline{p-1}} = xy^{p-1} + \cdots + y^{p-1}x,$$

с обзиром на $L$, следи

$$S_{\overline{p-1}\,1} + \cdots + S_{1\,\overline{p-1}} = 0. \tag{2.2}$$

Како (2.2) важи за свако $x, y \in Tp$ то и за $y = 2y,\ 3y, \cdots, (p-1)y$, те из (2.2) добијамо систем

$$\begin{aligned} &S_{\overline{p-1}\,1} + \cdots S_{1\,\overline{p-1}} = 0\\ &2\,S_{\overline{p-1}\,1} + \cdots + 2^{p-1}S_{1\,\overline{p-1}} = 0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(p-1)\,S_{\overline{p-1}\,1} + \cdots + (p-1)^{p-1}S_{1\,\overline{p-1}} = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Из (2.3) лако се добива

$$\triangle\, S_{\overline{p-1}\,1} = 0 \tag{2.4}$$

где је

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1\\ 2 & 2^2 & \cdots 2^{p-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ p-1 & (p-1)^2 & \cdots (p-1)^{p-1} \end{vmatrix}$$

Вандермондова детерминанта.

Даље из

$$(\triangle, p) = 1$$

следи

$$S_{\overline{p-1}\,1} = (\triangle\, r + pq) S_{\overline{p-1}\,1} = r\,\triangle\, S_{\overline{p-1}\,1} - q\,p\,S_{\overline{p-1}\,1},$$

а према (2.4) и чињеници да је $Tp$ карактеристике $p$, следи

$$S_{\overline{p-1}\,1} = 0.$$

Како је

$$x\ S_{\overline{p-1}\,1} - S_{\overline{p-1}\,1}\ x = x^p y - yx^p,$$

то је

$$x^p y = yx^p. \tag{2.5}$$

**Лема 2.** У телу $L\,Tp$ из

$$a^p = b^p$$

следује

$$a = b,$$

**Доказ.** За $x = a \quad y = -b \; L$ постаје

$$(a - b)^p = a^p - b^p$$

Даље је према (2.6),

$$(a - b)^p = 0,$$

а како $Tp$ нема делиоца нуле то је

$$a = b,$$

Из (2.5) добива се

$$x^p = yx^p y^{-1} = (yxy^{-1})^p,$$

а према леми 2

$$x = y x y^{-1}$$

одакле за $\forall \; x, y \in Tp$

$$xy = yx.$$

То је потребно и доказати.*)

Časlav Stanojević

## A SUFFICIENT AND NECESSARY CONDITION FOR COMMUTATIVITY OF DIVISION RINGS WITH CHARACTERISTIC $p$

Summary

Let $Tp$ be a division ring of characteristic $p$. Sufficient and necessary condition for commutativity of $Tp$ is

$$(x + y)^p = x^p + y^p.$$

Necesserity is known [4], sufficiency is proved.**)

### ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Jakobson, Structure theory for algebraic algebras of bounded degree. Ann. Math., 46 (1945).

[2] N. Hernstein, A condition for the commutativity of rings, Canadian Yourn. of Math., Vol IX № 4, 1957.

[3] E. Artin, Geometric Algebra.

[4] G. Birkhoff, Macc Lane, A Survey on Modern Algebra, 1953.

*) У некомутативном интегралном домену $D_p$, карактеристике $p$, са особином ($L$), услов комутативности је да

$$x^{p-1} \in ZD_p$$

где је $ZD_p$ центар интегралног домена $D_p$

У прстену $T_3$ из $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ следи уопштена комутативност

$$(xy)\,(yx) = (yx)\,(xy).$$

**) It is interesting whether existence of a function $f(x)$, with

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

and farher conditions imply in a ring $R$, commutativity.