Математички Билтен
11-12 (XXXVII-XXXVIII)
1987-1988 (5-11)
Скопје, Југославија

ЕГЗИСТЕНЦИЈА И КОНСТРУКЦИЈА НА ПОЛИНОМНИ РЕШЕНИЈА НА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Илија А. Шапкарев

0. Вовед

Да ја разгледаме диференцијалната равенка

$$\alpha y'' + \beta y' + Fy = 0 \tag{1}$$

при која $\alpha = Ax^2+Bx+C$, $\beta = Dx+E$, $A(\neq 0)$, B, C, D, E и F се реални константи.

Како што е познато [1,2], потребен и доволен услов за диференцијалната равенка (1) да има полиномно решение од степен m е да биде исполнета релацијата

$$\frac{m(m-1)}{2}\alpha'' + m\beta' + F = 0. \tag{2}$$

Полиномното решение од степен m е дадено со формулата на Родригез [3,4]

$$y_1 = \alpha e^{-\Phi}(\alpha^{m-1}e^{\Phi})^{(m)}, \tag{3}$$

каде што

$$\Phi = \int \frac{\beta}{\alpha}\,dx.$$

Во [4,5] се добиени услови за егзистенција на две полиномни решенија од степени m и n $(m<n)$ на равенката (1) како и постапка за добивање на второто полиномно решение.

Ние, во овој труд, ги добиваме условите за егзистенција на две полиномни решенија на диференцијалната равенка (1) и ги конструираме формулите со кои се добиваат двете полиномни решенија од степени m и n.

1. Услови за егзистенција на две полиномни решенија

Диференцијалната равенка (1), по m последователни диференцирања, станува

$$\alpha y^{(m+2)} + (m\alpha'+\beta)y^{(m+1)} + \left[\frac{m(m-1)}{2}\alpha'' + m\beta' + F\right]y^{(m)} = 0. \tag{4}$$

Од оваа равенка, под претпоставка дека равенката (1) има полиномно решение од степен m, т.е. дека е исполнета релацијата (2), ја добиваме равенката

$$y^{(m+2)} + (m\alpha'+\beta)y^{(m+1)} = 0. \tag{5}$$

Да претпоставиме, сега, дека равенката (1) покрај полиномното решение (3) од степен m има и друго полиномно решение од степен n (m < n) и да ставиме

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{m\alpha'+\beta}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i'+1}, \quad (i=1,2,\dots,n-m-2). \tag{6}$$

Во тој случај, од равенката (5), ги добиваме равенките

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 y^{(m+3)} + (\alpha_1'+1)y^{(m+2)} = 0,\\
&\alpha_2 y^{(m+4)} + (\alpha_2'+1)y^{(m+3)} = 0,\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\
&\alpha_{n-m-1} y^{(n+1)} + (\alpha_{n-m-1}'+1)y^{(n)} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Од последнава равенка лесно може да се утврди дека потребен и доволен услов за равенката (1) да има полиномно решение од степен n е да биде исполнета релацијата

$$\alpha_{n-m-1}'+1 = 0. \tag{8}$$

Од оваа релација, со интегрирање, наоѓаме

$$\alpha_{n-m-1} + P_1 = 0,$$

каде што $P_1=P_1(x)$ е полином од прв степен така што $P_1'(x)=P_0(x)=1$.

Од последнава релација, во врска со (6), ја добиваме релацијата

$$(P_1\alpha_{n-m-2})' + P_1 = 0;$$

од неа, со интегрирање, добиваме

$$P_1\alpha_{n-m-2} + P_2 = 0,$$

каде што $P_2'(x)=P_1(x)$.

Со примена на математичката индукција лесно се докажува дека за секој природен број $i=1,2,\dots,n-m-2$ важи релацијата

$$P_i\alpha_{n-m-1-i} + P_{i+1} = 0. \tag{9}$$

Од оваа релација, за $i=n-m-2$, следува

$$P_{n-m-2}\alpha_1 + P_{n-m-1} = 0,$$

од каде што, во врска со (6), наоѓаме

$$\alpha P'_{n-m-1} + (m\alpha'+\beta)P_{n-m-1} = 0. \tag{10}$$

Со решавањето на оваа равенка во однос на P_{n-m-1} имаме

$$P_{n-m-1} = \alpha^{-m}e^{-\Phi}. \tag{11}$$

Со x_1 и x_2 да ги означиме нулите на полиномот α и прво да претпоставиме дека $x_1 \neq x_2$.

Ако ставиме

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{Dx+E}{A(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{M_1}{A(x-x_1)} + \frac{M_2}{A(x-x_2)},$$

за M_1 и M_2 добиваме

$$M_1 = \frac{Dx_1+E}{x_1-x_2}, \qquad M_2 = \frac{Dx_2+E}{x_2-x_1}.$$

За P_{n-m-1}, од (11), сега наоѓаме

$$P_{n-m-1} = A^{-m}(x-x_1)^{-m-M_1/A}(x-x_2)^{-m-M_2/A}.$$

За да биде десната страна од ова равенство полином од степен n-m-1 треба да бидат исполнети релациите

$$-m-M_1/A = \ell,$$

$$-m-M_2/A = n-m-1-\ell \quad (\ell=0,1,\ldots,n-m-1),$$

т.е. релациите

$$\begin{aligned} &(m+n-1)A + D = 0, \\ &A(n-1-\ell)x_1+A(m+\ell)x_2-E = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Од првата од овие релации и од (2) за F добиваме

$$F = mnA. \tag{13}$$

Од оваа релација и од првата релација од (12) се гледа дека m и n се корени на равенката (2).

Значи, потребен и доволен услов за равенката (1) да има две полиномни решенија од степени m и n е да бидат исполнети релацијата (2) и релациите (12).

Во случај кога нулите x_1 и x_2 на полиномот α се конјугирано комплексни броеви $x_1=p+iq$, $x_2=p-iq$, од втората од релациите (12) добиваме

$$E = (m+n-1)Ap+i(n-m-2\ell-1)Aq,$$

од каде што следува

$$n-m = 2\ell+1.$$

Значи, ако нулите x_1 и x_2 на полиномот α не се реални броеви, равенката (1) ќе има две полиномни решенија од степени m и n.

2. Конструкција на полиномните решенија

Полиномното решение (3) од степен m на равенката (1), во врска со (11), станува

$$y_1 = \alpha^{m+1} P_{n-m-1} \left(\frac{1}{\alpha P_{n-m-1}}\right)^{(m)},$$

а за полиномното решение y_2 од степен n, од (5) и (10), следува дека

$$y_2^{(m+1)} = P_{n-m-1}. \qquad (14)$$

Бидејќи

$$P_{n-m-1} = (x-x_1)^{\ell}(x-x_2)^{n-m-\ell-1}$$

имаме

$$y_1 = (x-x_1)^{m+1+\ell}(x-x_2)^{n-\ell}\left[\frac{1}{(x-x_1)^{\ell+1}(x-x_2)^{n-m-\ell}}\right]^{(m)}.$$

Ако ставиме

$$\frac{1}{(x-x_1)^{\ell+1}(x-x_2)^{n-m-\ell}} = \sum_{i=1}^{\ell+1} \frac{A_i}{(x-x_1)^i} + \sum_{i=1}^{n-m-\ell} \frac{B_i}{(x-x_2)^i}$$

наоѓаме

$$A_i = \frac{1}{(\ell+1-i)!}\left[\frac{1}{(x-x_2)^{n-m-\ell}}\right]^{(\ell+1-i)}_{x=x_1} =$$

$$= \frac{(-1)^{\ell+1-i}(n-m-i)!}{(\ell+1-i)!(n-m-\ell-1)!} \frac{1}{(x_1-x_2)^{n-m+1-i}}, \quad (i=1,2,\ldots,\ell+1)$$

$$B_i = \frac{1}{(n-m-\ell-i)!}\left[\frac{1}{(x-x_1)^{\ell+1}}\right]^{(n-m-\ell-i)}_{x=x_2} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-m-\ell-i}(n-m-i)!}{(n-m-\ell-i)!\,\ell!} \frac{1}{(x_2-x_1)^{n-m+1-i}}, \quad (i=1,2,\ldots,n-m-\ell).$$

Сега имаме

$$(x-x_1)^{m+1+\ell}(x-x_2)^{n-\ell}\left[\frac{1}{(x-x_1)^{\ell+1}(x-x_2)^{n-m-\ell}}\right]^{(m)} =$$

$$= (x-x_1)^{m+1+\ell}(x-x_2)^{n-\ell}\left[\sum_{i=1}^{\ell+1}\frac{A_i}{(x-x_1)^i}+\sum_{i=1}^{n-m-\ell}\frac{B_i}{(x-x_2)^i}\right]^{(m)} =$$

$$= (-1)^m m!\left[(x-x_2)^{n-\ell}\sum_{i=1}^{\ell+1}\binom{m+i-1}{m}A_i(x-x_1)^{\ell+1-i} +\right.$$

$$\left.+ (x-x_1)^{m+1+\ell}\sum_{i=1}^{n-m-\ell}\binom{m+i-1}{m}B_i(x-x_2)^{n-m-\ell-i}\right].$$

Значи, формулата на Родригез (3) станува

$$\begin{aligned} y_1 = {} & (x-x_2)^{n-\ell}\sum_{i=1}^{\ell+1}\binom{x+i-1}{m}A_i(x-x_1)^{\ell+1-i} + \\ & + (x-x_1)^{m+1+\ell}\sum_{i=1}^{n-m-\ell}\binom{m+i-1}{m}B_i(x-x_2)^{n-m-\ell-i}. \end{aligned} \tag{15}$$

За второто полиномно решение од степен n $(m<n)$, од (14), имаме

$$\begin{aligned} y_2^{(m+1)} &= P_{n-m-1} = (x-x_1)^{\ell}(x-x_2)^{n-m-1-\ell} = \\ &= [(x-x_2)+(x_2-x_1)]^{\ell}(x-x_2)^{n-m-1-\ell} = \\ &= \sum_{i=0}^{\ell}\binom{\ell}{i}(x_2-x_1)^i(x-x_2)^{n-m-1-i}, \end{aligned}$$

од каде што следува

$$y_2 = \sum_{i=0}^{\ell} C_i(x-x_2)^{n-i}, \tag{16}$$

при што

$$C_i = \frac{(n-m-1-i)!}{(n-1)!}\binom{\ell}{i}(x_2-x_1)^i, \quad (i=0,1,\dots,\ell).$$

За $x_1=x_2$ многу едноставно се добива дека диференцијалната равенка

$$(x-x_1)^2y''-(m+n-1)(x-x_1)y'+mny = 0$$

има две полиномни решенија од степен m и n:

$$y_1 = (x-x_1)^m, \qquad y_2 = (x-x_1)^n.$$

3. Примери

Пример 1. За n=m+1 следува дека диференцијалната равенка

$$[(x-x_2)^2+(x_2-x_1)(x-x_2)]y'' -$$
$$-[2m(x-x_2)+m(x_2-x_1)]y'+m(m+1)y = 0$$

има две полиномни решенија од степени m и m+1

$$y_1 = (x-x_2)^{m+1}-(x-x_1)^{m+1},$$
$$y_2 = (x-x_2)^{m+1}.$$

Пример 2. За n=m+2 за $\ell=0$ следува дека диференцијалната равенка

$$[(x-x_2)^2+(x_2-x_1)(x-x_2)]y'' -$$
$$-[(2m+1)(x-x_2)+(m+1)(x_2-x_1)]y'+m(m+2)y = 0$$

има две полиномни решенија од степени m и m+2

$$y_1 = \frac{(x-x_2)^{m+2}}{(x_2-x_1)^2} - \frac{(x-x_1)^{m+1}(x-x_2)}{(x_2-x_1)^2} + (m+1)\frac{(x-x_1)^{m+1}}{x_2-x_1}.$$
$$y_2 = (x-x_2)^{m+2},$$

а за $\ell=1$ диференцијалната равенка

$$[(x-x_2)^2+(x_2-x_1)(x-x_2)]y'' -$$
$$-[(2m+1)(x-x_2)+m(x_2-x_1)]y'+m(m+2)y = 0$$

има две полиномни решенија од степени m и m+2

$$y_1 = \frac{(x-x_1)^{m+2}}{(x_2-x_1)^2} - (m+1)\frac{(x-x_2)^{m+1}}{x_2-x_1} - \frac{(x-x_2)^{m+1}(x-x_1)}{(x_2-x_1)^2},$$

$$y_2 = \frac{(x-x_2)^{m+2}}{(m+2)!} + \frac{x_2-x_1}{(m+1)!}(x-x_2)^{m+1}.$$

Л и т е р а т у р а

[1] Abbé Lainé: Sur l'integration de quelques equations differentielles du second ordre, L'Enseignement mathématique 23 (1924) 163-173, Paris-Genéve

[2] Šapkarev, I.A.: Über die Rodriguesformel und eine ihre Anwendung, MANU, Contributions, IV 1-Section of Mathematical and Technical Sciences (1983) Skopje

[3] Šapkarev, I.A.: Existenz und Konstruktion der Polynomlösung der homogenen linearen Differentialgleichungen, Contributions, VIII 1-Section of Mathematical and Technical Sciences (1987) Skopje

[4] Gonsalves, V.J.: Sur la formul de Rodrigues, Portugaliae Math. 4, 52-64 (1934)

[5] Пиперевски, Б.М.: Полиномни решенија на една класа линеарни диференцијални равенки и нивна примена, докторска дисертација (1982), Скопје

EXISTENZ UND KONSTRUKTION DER POLYNOMLÖSUNGEN EINER KLASSE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER ZWEITEN ORDNUNG

Ilija A. Šapkarev

Zusammenfassung

In der Arbeit werden die Bedingungen (2) und (12) erhalten, so dass die Differentialgleichung (1) zwei Polynomlösungen der Grade m und n $(m<n)$ besitzt. Diese zwei Polynomlösungen sind mit den Formeln (15) und (16) gegeben. Weiter werden einige Beispiele der Polynomlösungen der Differentialgleichung (1) konstruirt. Die Grade dieser Polynomlösungen sind m und $m+i$ $(i=1,2)$.