Математички Билтен
31 (LVII)
2007 (69-78)
Скопје, Македонија

ISSN 0351-336X

РАЗГЛЕДУВАЊЕ НА ДИСТРИБУЦИЈА НА ПРОСТИ БРОЕВИ ПРЕКУ RIEMANNOVATA ЗЕТА ФУНКЦИЈА

Крсто Павиќевиќ

Апстракт

Во овој труд е разгледана Риеманновата зета функција, односно нејзината врска со Теоремата за прости броеви (ПНТ), која се зема за основна теорема за прашањата на дистрибуцијата на прости броеви. Со цел да оваа работа претставува една целина, покрај оригиналната лема [4] се дадени и некои познати резултати од оваа проблематика.

Дефиниција 1: Редови од облик $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, каде е s комплексен број, а $a(n)$ низа на комплексни броеви се нарекуваат **Dirichleovi** редови.

Реалниот дел на комплексниот број s ќе го означиме со R_s.

Најважниот **Dirichleov** ред е најпростиот од нив. Станува збор за **Riemannova** зета функција која се добива кога е $a(n) = 1$, т.е. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$

Euler иницирал истражување кое имало за цел **Riemannovata** функција да ја поврзе со простите броеви. Таква врска е дадена со следната:

Теорема 1. $\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, $R_s > 1$, која ја нарекуваме **Eulerov** производ [1].

Доказ. $\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\left(\frac{p^s-1}{p^s}\right)^{-1}=\frac{p^s}{p^s-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$

Применувајќи го на горното равенство својството на геометрискиот ред

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}r^k \quad \text{за} \quad |r|<1,$$

добиваме

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=1+\frac{1}{p^s}+\left(\frac{1}{p^s}\right)^2+\cdots,$$

па користејќи ја основната теорема на аритметиката за единствената факторизација на природните броеви, добиваме дека

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^s. \qquad \square$$

Дефиниција 2. Нека $f=\sum\limits_{m=n}^{\infty}a_m(z-z_0)^m$, $a_n\neq 0$. Ако е $n>0$, тогаш велиме дека функцијата f има нула од ред n во точката z_0, а ако е $n<0$ велиме дека функцијата f има пол од n-ти ред во z_0. Ако е $n=-1$, велиме дека f има прост пол, со резидиум a_{-1}.

Дефиниција 3. f е мероморфна функција во точката z_0 ако **Laurentov** ред во точката z_0 конвергира за секое z во некоја околина на z_0, т.е. постои диск околу z_0 со полупречник r и постои цел број n_0 таков да за сите z : $|z-z_0|<r$, редот $f(z)=\sum\limits_{n\geq n_0}a_n(z-z_0)^n$ е конвергентен.

Ако f е мероморфна во секоја точка на дискот, тогаш велиме дека f е мероморфна во дискот.

Ако е $n_0\geq 0$, велиме дека f е аналитичка.

Преку гама функцијата $\Gamma(s)=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}\,dt$ (за $R_s>0$) и нејзините својства се покажува дека **Riemannovata** функција е аналитичка и дека може аналитички да се продолжи до мероморфната функција со прост пол во точката $s=1$.

Напомена: Гама функцијата $\Gamma(s)$ всушност е генерализација на функцијата факториели, бидејќи $\Gamma(n)=(n-1)!$, $n\in\mathbf{N}$.

Основните својства на оваа функција дадени се со следнава:

Лема 1. - $\Gamma(s)$ може мероморфно да се продолжи на целата комплексна рамнина со прости полови за $s=0,-1,-2,\ldots$ а резидиумите во $s=-k$ изнесуваат $\frac{(-1)^k}{k!}$ и притоа мероморфното продолжување на функцијата $\Gamma(s)$ никогаш не е еднакво на 0 [2].

– $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$ и $\Gamma(s)\,\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s}\pi^{1/2}\Gamma(2s)$

– $\ln\Gamma(s) = \left(s-\dfrac{1}{2}\right)\ln s - s + \dfrac{1}{2}\ln 2\pi + O(|s|^{-1})$.

Продолжувањето на **Riemannovata** зета функција се дефинира со

$$F(s) = \frac{1}{2}\,s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s) = F(1-s)$$

и се нарекува функционална равенка за $\zeta(s)$.

Од **Euleroviot** производ следува дека **Riemannovata** функција нема нула за $R_s > 1$, а за $R_s < 0$ единствени нули се во точките $s = -2, -4, \ldots$, што јасно следува од функционалната равенка и првото својство од претходната лема 1 која зборува за половите на функцијата $\Gamma(s)$.

Овие нули се нарекуваат тривијални нули. Сите останати нули (кои ги нарекуваме нетривијални), а тоа го знаел и **Riemann,** мораат да лежат во критична тесна трака дадена за $0 \le R_s \le 1$ и уште повеќе, мораат да лежат симетрично околу критичната линија $R_s = 1/2$.

Riemann тврдел дека тие лежат на правата $R_s = 1/2$ и ова тврдење е познато како **Riemannova** хипотеза (1859 год.). Оваа позната **Riemannova** хипотеза, и покрај бројните обиди, до ден денешен не е докажана нити побиена [1].

Првиот чекор во докажување на теоремата е доказот дека на линијата $R_s = 1$ нема нула, што заедно со горното тврдење имплицира дека сите нетривијални нули се наоѓаат во траката $0 < R_s < 1$.

Но, и покрај тоа што **Riemannovata** хипотеза сеуште не е докажана, има доста обиди во прилог на оваа теза, а еден од нив е и **Hardijeviot** доказ од 1915 год. дека бесконечно многу нули на функцијата $\zeta(s)$ лежат на критичната права [1]. До денеска е проверено дека првите десет трилиони нетривијални нули лежат на критичната права – тоа го покажале 2004 год. **Xavier Gourdon** и **Patrick Demichel** [2].

Оваа зета функција е тесно поврзана со дистрибуција на прости броеви. Имено, прва и основна врска е **Eulerovata** формула, од каде следува врската меѓу нулите на оваа функција и простите броеви, имајќи ја во вид добро познатата особина од алгебрата за меѓусебната поврзаност на нулите и коефициентите на полиномите. Две функции играат голема и важна улога во тоа: Една од нив е **Magnoldtova** функција Λ дефинирана со:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{ако е } \; n = p^k, \; p \text{ е прост број} \\ 0, & \text{поинаку} \end{cases}$$

и втората која е еднаква на

$$\psi(\chi) = \sum_{n\leq\chi} \Lambda(\chi),$$

позната како **Cebisljeva** функција.

Функциите $\Lambda(n)$ и $\psi(x)$ [7] ги имаат следниве својства:

Лема 2.

1) $\sum\limits_{d|p^k} \Lambda(d) = k \cdot \ln p$

2) $\sum\limits_{d|n} \Lambda(d) = \ln n.$

Доказ. 1) Делители на бројот p^k се $p, p^2, \ldots, p^k$ и како е $\Lambda(p) = \Lambda(p^2) = \cdots = \Lambda(p^k) = \ln p$, следува тврдењето 1.

2) Заради фундаменталната теорема на аритметиката имаме дека е $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ и единствените делители на бројот n за кои е **Magnoldtova** функција поголема од нула се делителите на бројот $p_1^{k_1}, \ldots, p_s^{k_s}$, а согласно тврдењето 1 имаме дека е:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = k_1 \ln p_1 + \cdots + k_s \ln p_s = \ln p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s} = \ln n\,.$$

Резултатот со кој ќе го почнеме разгледувањето на **Riemannovata** зета функција е

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r} (z - z_0)^n = \begin{cases} 1 \text{ ако е } & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

Мероморфните функции можат да се развиваат во ред, па имаме дека е

$$f(z) = \sum_{n\geq n_0} a_n (z - z_0)^n.$$

Ако f не е идентички еднаква 0, за доволно мало r можеме да одбереме диск во кој f нема полови, освен, можеби во z_0.

За функцијата $f(z)$ дефинираме резидиум во z_0 кој е еднаков со

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = a_{-1}.$$

Ако $f(z)$ е мероморфна функција во дискот со конечно многу полови $z_1, \ldots, z_N$, тогаш

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r} f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{N} a_{-1}(z_n).$$

Ако е

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n, \ n \neq 0, \quad \text{тогаш е} \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0}.$$

$\frac{f'(z)}{f(z)}$ е извод од логаритмот на функцијата $f(z)$.

Имајќи ги во вид горните резултати, добиваме:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-b|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \begin{cases} n, \text{ ако } z_0 \text{ е во дискот со центар во } b \text{ и радиус } r \\ 0, \text{ поинаку} \end{cases}$$

Горниот резултат го упростуваме за функцијата $f(z) = \sum\limits_{m \geq n} a_m(z - z_0)^m$ и добиваме дека:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m(z - z_0)^m,$$

и ако $f(z)$ има највеќе една нула или пол во дискот со полупречник r околу b,тогаш е:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-b|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \begin{cases} n, \text{ ако } z_0 \text{ во дискот со радиус } r \text{ со центар во } b \\ 0, \text{ во секој друг случај} \end{cases}$$

за $R_s > 1$, имаме дека е

$$\zeta'(s) = -\sum_n \frac{\ln n}{n^s}.$$

Лема 3. За $R_s > 1$, важи $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum\limits_n \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ [2].

Доказ. Како е $|\Lambda(n)| \leq \ln n$ и имајќи предвид дека е $|n^s| = n^\sigma$, имаме

$$\left|\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| \leq \frac{\ln n}{n^\sigma}.$$

Кога горното неравенство ќе го помножиме со $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ добиваме:

$$\Big(\sum_{l=1}^{\infty} 1/l^s\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s \Big(\sum_{k\,l=n} \Lambda(k)\Big).$$

пришто на десната страна во внатрешната сума се сумира по сите k и l чиј што производ е n.

Magnoldtovata функција е различна од 0 само за степен со основа прост број, па за $n = p_1^{r_1} \dots p_t^{r_t}$ имаме

$$\sum_{k\,t=n} \Lambda(k) = \ln n.$$

Притоа, добиваме:

$$\zeta(s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln n / n^s = -\zeta'(s),$$

од каде што следува тврдењето на лемата 3, со напомена дека единственоста на аналитичкото продолжување обезбедува дека функцијата $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ е аналитичка во областа $R_s > 1$ (во таа област $\zeta(s) \neq 0$, затоа што нула на функцијата би била пол на функцијата $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$).

Значи, за $R_s > 1$, имаме дека е

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \tag{1}$$

Равенката (1) помножена со $\dfrac{x^s}{s}$ (x е произволен параметар кој тежи кон бесконачност) треба да се интегрира по границата на дискот бирајќи како да се осигура конвергенцијата на сите интеграли, па добиваме:

$$\oint \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \, \frac{x^s}{s} \, ds = -\oint \sum_{n} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \, \frac{x^s}{s} \, ds\,. \tag{2}$$

Ја користиме следната лема од комплексната анализа:

Лема 4.

$$\oint \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^x}{s} \, ds = \begin{cases} 1, \text{ако е} & n < x \\ 0 & n \geq x \end{cases}$$

За да ја трансформираме левата страна, неопходно е да се пресметаат резидиумите на функцијата $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \, \dfrac{x^s}{s}$ во нули и полови на функцијата $\zeta(s)$. Множејќи ја равенката (2) со -1 и конбинирајќи ги наведените резултати го трансформираме равенството (2) во равенство

$$x - \sum_{\rho} : \zeta(\rho) = o\frac{x^{\rho}}{\rho} = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

при што x е добиено како резидиум во полот на функцијата $\zeta(s)$ за $s=1$, а $\frac{x^\rho}{\rho}$ се добива како резидиум во нулите на функцијата $\zeta(s)$.

Оваа формула е позната под името експлицитна формула.

Ако претпоставиме дека сите нули се на $R_\rho = 1/2$, тогаш левата страна станува $x + O(\chi^{1/2})$.

Набљудувајќи ја функцијата: $\theta(x) = \sum_{p\leq x} \ln p, \quad x > 0$ и $\psi(\chi) = \sum_{p^m \leq x} \ln p$, $x > 0$ ја докажуваме следната лема која дава асимптотска поврзаност на овие функции и функциите $\pi(x)$.

Лема 5. Функциите $\frac{\theta(x)}{x}$, $\frac{\psi(x)}{x}$ и $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$ имаат еднакви долни и горни гранични вредности, кога $x \to \infty$ [7].

Доказ. Нека α_1, α_2 и α_3 се долната гранична вредност за функциите $\frac{\theta(x)}{x}$, $\frac{\psi(x)}{x}$ и $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$. Соодветно од самата дефиниција јасно е дека

$$\theta(x) \leq \psi(\chi),$$

$$\psi(x) = \sum_{p\leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p \leq \sum_{p\leq x} \frac{\ln x}{\ln p} \ln p = \ln x \sum_{p\leq x} 1 = \pi(x) \ln x,$$

а одовде делејќи со x добиваме:

$$\frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}, \quad \text{од каде што} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 . \tag{3}$$

Но, од друга страна, за секое α кое е поголемо од 0 и помало од 1 и произволно x имаме:

$$\theta(x) \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \ln p \geq \ln(x^\alpha) \sum_{x^\alpha < p \leq x} 1 = \alpha \ln x (\pi(x) - \pi(x^\alpha)),$$

но како е $\pi(x^\alpha) < x^\alpha$, имаме:

$$\frac{\theta(x)}{x} \geq \frac{\alpha \ln x(\pi(x) - x^\alpha))}{x}$$

$$\frac{\theta(x)}{x} \geq \alpha\left(\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} - \frac{\ln x}{x^{1-\alpha}}\right).$$

Бидејќи $\alpha < 1$ имаме $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^{1-\alpha}} = 0$, па добиваме дека е $\alpha_1 \geq \alpha\,\alpha_3$, и како е α произволно избран број од интервалот (0,1), α може да биде близу до 1. Оттука добиваме $\alpha_1 \geq \alpha_3$, па заради (3) следува дека долните граници се еднакви.

Слично се покажува дека и горните граници се еднакви.

Од оваа лема 5 и горниот резултат дека левата страна е експлицитна формула $x + O(\chi^{1/2})$, добиваме дека е $\pi(x) \approx x/\ln x$.

Значи, користејќи ја техниката на комплексна анализа, информацијата за локација на нула на **Riemannovata** функција нас не доведе до бројот прости броеви.

Всушност $\zeta(1+it) \neq 0$ е еквивалентна со ПНТ.

Сега ќе докажеме дека $\zeta(s)$ нема нула на правата $R_s - 1$.

Лема 6. Ако е $0 \leq r < 1$ и φ реален број,тогаш важи [7]:

$$|(1-r)^3(1-r\,e^{i\varphi})^4(1-r\,e^{2i\varphi})|^{-1} \geq 1\,.$$

Доказ. За $|z| < 1$ имаме $-\ln(1-z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$, па заради $t = \zeta\,e^{i\varphi}$ имаме: $|t| = \zeta$ и $\ln t = \ln\zeta + i\varphi$, а оттука $\ln|t| = \ln\zeta = \mathrm{Re}\,(\ln t)$.

Поради полесно запишување, ја означуваме левата страна на неравенството коешто треба да го докажеме со $M(r,\varphi)$, па имаме:

$$\begin{aligned}
\ln M(r,\varphi) &= -3\ln(1-r) - 4\ln|1-r\,e^{i\varphi}| - \ln|1-r\,e^{2i\varphi}| \\
&= -3\,\mathrm{Re}\,\ln(1-r) - 4\mathrm{Re}\,(\ln(1-r\,e^{i\varphi})) - \mathrm{Re}\big(\ln(1-r\,e^{2i\varphi})\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\,\mathrm{Re}\,(3 + 4\,e^{in\varphi} + e^{2in\varphi}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\,\mathrm{Re}\,(3 + 4\cos n\varphi + 4i\sin n\varphi + \cos 2n\varphi + i\sin 2n\varphi) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n}\,(3 + 4\cos n\varphi + \cos 2n\varphi) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2r^n}{n}(1+\cos n\varphi)^2 \geq 0\,,
\end{aligned}$$

од каде следи тврдењето во лемата 6.

Теорема 2. Функцијата $\zeta(s)$ нема нули на правата $R_s = 1$ [7].

Доказ. Нека е $\sigma > 1$. Тогаш од **Euleroviot** производ имаме:

$$\begin{aligned}
&|\zeta^3(\sigma)\,\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta(\sigma+2it| = \\
&= \prod_p |(1-p^{-\sigma})^3\,(1-p^{-\sigma-it})^4\,(1-p^{-\sigma-2it})|^{-1}\,. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Ставајќи во лема 6 дека е $R = p^{-\sigma}$ и $e^{i\varphi} = p^{-it}$ добиваме дека секој израз во (4) е поголем или еднаков на 1.

Значи, имаме:

$$|\zeta^3(\sigma)\,\zeta^4(\sigma+it)\,\zeta(\sigma+2it)| \geq 1\,. \tag{5}$$

Да претпоставиме дека $\zeta(1+it_0) = 0$, $t_0 \neq 0$. Како е $\zeta(s)$ аналитичка во точката $s = 1 + it_0$, имаме:

$$\zeta(\sigma+it_0) = O(\sigma-1), \quad \sigma \to 1\,. \tag{6}$$

Како е за $\sigma > 1$

$$|\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\sigma \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma-1} = \frac{\sigma}{\sigma-1}\,,$$

тоа за $1 < \sigma \leq 2$ имаме дека е $|\zeta(\sigma)| \leq \frac{\sigma}{\sigma-1} \leq \frac{2}{\sigma-1}$, па оттука и равенството (6) имаме дека е

$$\zeta^3(\sigma)\,\zeta^4(\sigma+it_0) = O(\sigma-1)\,, \quad \sigma \to 1\,. \tag{7}$$

Но, функцијата $\zeta(\sigma + 2it_0)$ е непрекината, па и ограничена на отсечката $1 \leq \sigma \leq 2$.

Според тоа, неравенството (5) и процената (7) се противречни, од каде што следува тврдењето на теоремата 2.

Литература

[1] Alan Baker: *A concise Introduction to the Teory of Numbers,* Cambridge University Press, 1984

[2] S. J. Miller, R.Takloo-Bighash: *An Invitation to Modern Number Theory,* Princeton University Press, 2006

[3] G.Everest, T.Ward: *An Introduction to Number Theory,* Springer, 2005

[4] Harvey Cohn: *Advanced Number Theory,* Dover Publications, New York, 1980

[5] Ahlfors V. L.: *Complex Analysis,* (Second Ed.), McGraw-Hill Book Company, 1966

[6] H. E. Rose:*A Course in Number Theory,* Oxford Science Publications, 1999

[7] Ivić, Aleksandar, *Uvod u Analitičku Teoriju brojeva,* 1996, Sremski Karlovci: Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića.

ANALYSIS OF DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS USING RIEMANN ZETA FUNCTION

Krsto Pavićević

Summary

The subject of this work is relation betwen Reimann zeta function and Prime Number Theorem which is the fundamental theorem for the subject of distribution of prime numbers.In order to make this work completed apart from original lemma [4] some altready existing rezults relating to this matter are added as well.

Faculty of Natural Sciences and Mathematics
University of Montenegro-Podgorica
Cetinjski put bb 81000-Podgorica
Montenegro

e-mail: krstop@cg.yu