Математички Билтен
Книга 3—4 (XXIX—XXX) 1979—1980, (79—90)
Скопје — Југославија

ТЕОРЕМИ ОД ТИП ЕРУГИН-ПЕЈОВИЌ ЗА ЛИНЕАРНА ПАРЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД IV РЕД

С. Георѓиевска

Целта на оваа работа е да се покаже дека познатата постапка дадена од Т. Пејовиќ [1], а потоа и од Н.П. Ерјугин [2], за сведување линеарни диференцијални равенки на равенки со константи коефициенти, може да се пренесе без поголеми тешкотии и на линеарни парцијални равенки. Бидејќи во трудот[3] е покажано од страна на Е. Атанасова и Д. Димитровски дека таа иста постапка може да се примени и на нелинеарни обични диференцијелни равенки, следува заклучокот дека таа иста постапка е универзална

Предметот на оваа работа е конкретното наоѓање на потребните и доволните услови да општата линеарна парцијална равенка од IV ред

$$\sum_{k=0}^{4}\sum_{i=0}^{4-k}\binom{4-k}{i} A_{4-k-i,i}\,\frac{\partial^{4-k}z}{\partial x^{4-k-i}\,\partial y^{i}}=0 \tag{1}$$

(каде $A_{4-k-i,\,i}=A_{4-k-i,\,i}(x,y)$ за $k=0,1,\dots,4$ и $i=0,1,\dots,4\text{-}k$ се доволно глатки финкции), со смената на независно променливите

$$\begin{aligned} u&=f\,(x,y)\\ v&=g\,(x,y)\end{aligned} \tag{2}$$

може да се сведи на равенка со константни коефициенти.

Проблемот равенката (1) за $n=2$ и $n=3$ е разгледан порано во еден наш претходен труд [4].

Со други зборови, проблемот се сведува на избор на функциите (2): $f\,(x,y)$ и $g\,(x,y)$, така што равенката (1) да се сведе на равенка со константни коефициенти:

$$\sum_{k=0}^{4}\sum_{i=0}^{4-k}\binom{4-k}{i}\alpha_{4-k-i,i}\,\frac{\partial^{4-k}z}{\partial u^{4-k-i}\,\partial v^{i}}=0 \tag{3}$$

каде $\alpha_{4-k-i,i}$ се дадени константи, $(k=0,1,2,3,4;\ i=0,1,\dots,\ 4-k)$.

Користејќи познати теореми од анализа за смена на променливи се добива формулата

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^i \, \partial y^{n-i}} = \left(\frac{\partial}{\partial u} f'_x + \frac{\partial}{\partial v} g'_x\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial u} f'_y + \frac{\partial}{\partial v} g'_y\right)^{n-i} +$$

$$(4) \qquad + \sum_{s=0}^{2} \sum_{q=0}^{s} \binom{i}{s-q} \binom{n-i}{q} \left(\frac{\partial}{\partial u} f^{\,i-(s-q)+(n-i-q)}_{x^{i-(s-q)} y^{n-i-q}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} g^{\,i-(s-q)+(n-i-q)}_{x^{i-(s-q)} \, y^{n-i-q}} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u} f_x + \frac{\partial}{\partial v} g'_x\right)^{s-q}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} f' + \frac{\partial}{\partial v} g'_y\right)^q$$

за $n = 1,2,3,4$ и $i = 0,1,\ldots,n$.

Заменувајќи (4) во (1) се добива равенка од облик (3) каде $\alpha_{4-k-i,i}$ $(k = 0,1,\ldots,4;\ i = 0,1,\ldots,4-k)$ се определени со следните релации:

$$\alpha_{00} = A_{00}$$

$$\alpha_{10} = \sum_{k=0}^{4} \sum_{i=0}^{4-k} \binom{4-k}{i} A_{4-k-i,\,i} \frac{\partial^{4-k} f}{\partial x^{4-k-i} \, \partial y^i}$$

$$\alpha_{01} = \sum_{k=0}^{4} \sum_{i=0}^{4-k} \binom{4-k}{i} A_{4-k-i,\,i} \frac{\partial^{4-k} g}{\partial x^{4-k-i} \, \partial y^i}$$

$$(5) \; \alpha_{20} = \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=2}^{3} \sum_{i=0}^{k} (k+1) \binom{k}{i} A_{k-i-p+1,\,i+p} \frac{\partial f}{\partial x^{1-p} \partial y^p} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \sum_{p=0}^{k} \sum_{i=0}^{k} (2k-1) \binom{k}{i} \binom{k}{p} A_{2k-i-p,\,i+p} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-p} \partial y^p} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \, \partial y^i}$$

$$\alpha_{11} = \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=0}^{k} (k+1) \binom{k}{i} A_{k-i-p+1,\, i+p} \frac{\partial f}{\partial x^{1-p}\, \partial y^{p}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^k g}{\partial x^{k-i}\, \partial y^{i}} + \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=2}^{3} \sum_{i=0}^{k} (k+1) \binom{k}{i}$$

$$A_{k-i-p+1,i+p} \frac{\partial g}{\partial x^{1-p}\, \partial y^{p}} \cdot \frac{\partial^k g}{\partial x^{k-i}\, \partial y^{i}} +$$

$$+ 6 \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{k} \binom{2}{i} A_{4-k-i,k+i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-k}\, \partial y^{k}} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^{2-i}\, \partial y^{i}}$$

$$\alpha_{02} = \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=2}^{3} \sum_{i=0}^{k} (k+1) \binom{k}{i} A_{k-i-p+1,\, i+p} \frac{\partial g}{\partial x^{1-p}\, \partial y^{p}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^k g}{\partial x^{k-i}\, \partial y^{i}} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{p=2}^{k} \sum_{i=0}^{k} (2k-1) \binom{k}{i} \binom{k}{p} A_{2k-i-p,\, i+p}$$

$$\frac{\partial^k g}{\partial x^{k-p}\, \partial y^{p}} \cdot \frac{\partial^k g}{\partial x^{k-i}\, \partial y^{i}}$$

$$\alpha_{30} = \sum_{p=1}^{2} \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=0}^{p} p \binom{2}{k} \binom{p}{i} A_{2-k-i+p,\, i+k} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{2-k} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{k} \frac{\partial^p fi}{\partial x^{p-i} \partial y} +$$

$$+ 4 \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=0}^{1} \binom{2}{k} A_{4-k-i-p,\, i+k+p} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-k}\, \partial y^{k}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial x^{1-p}\, \partial y^{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^{1-i}\, \partial y^{i}}$$

$$\alpha_{21} = \sum_{p=1}^{2} \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=0}^{p} p \binom{2}{k} \binom{p}{i} A_{3-k-i+p-1,\, i+k} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{2-k} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{k} \frac{\partial^p g}{\partial x^{p-i} \partial y^{i}} +$$

$$+ 4 \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=0}^{1} \binom{2}{k} A_{4-k-i-p,\, i+p+k} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-k}\, \partial y^{k}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial x^{1-p}\, \partial y^{p}} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^{1-i}\, \partial y^{i}}$$

$$\alpha_{12}=\sum_{p=1}^{2}\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=0}^{p} p\binom{2}{k}\binom{p}{i} A_{3-k-i+p-1,\ i+k}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{2-k}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{k}\frac{\partial^{p} f}{\partial x^{p-i}\,\partial y^{i}}+$$

$$+4\sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=0}^{1}\binom{2}{k} A_{4-k-i-p,\ i+p+k}\frac{\partial^{2} g}{\partial x^{2-k}\,\partial y^{k}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial g}{\partial x^{1-p}\,\partial y^{p}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x^{1-i}\,\partial y^{i}}$$

$$\alpha_{03}=\sum_{p=1}^{2}\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=0}^{p} p\binom{2}{k}\binom{p}{i} A_{2-k-i+p,\ i+k}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{2-k}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{k}\frac{\partial^{p} g}{\partial x^{p-1}\,\partial y^{i}}+$$

$$+4\sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{2}\sum_{i=0}^{1}\binom{2}{k} A_{4-k-i-p,\ i+p+k}\frac{\partial^{2} g}{\partial x^{2-k}\,\partial y^{k}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial g}{\partial x^{1-p}\,\partial y^{p}}\cdot\frac{\partial g}{\partial x^{1-i}\,\partial y^{i}}$$

$$\alpha_{4-m,\,m}=\sum_{k=0}^{4-m}\sum_{i=0}^{m}\binom{4-m}{k}\binom{m}{i} A_{4-i-k,\,i+k}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{4-m-k}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{k}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{m-i}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{i}$$

$(m=0,1,2,3,4)$.

Бидејќи функциите $f(x,y)$ и $g(x,y)$ се сосема произволни, па нив можеме да ги определиме така што равенката (3) максимално да се упрости.

Уочувајќи дека структурата на коефицентите α_{40} и α_{04} е потполно иста, можеме да воведеме една заедничка вредност за двете функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$:

$$f(x,y),\ g(x,\ y)=h\ (x,y)$$

со цел двете да се одредат така што да важи

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k} A_{4-k,\,k}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{4-k}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^{k}=0. \tag{6}$$

Од хемогеноста на равенката (6) следува дека таа може да се сведе на една равенка од четврта степен по $\frac{\partial h}{\partial x} \Big/ \frac{\partial h}{\partial y}$, која по аналогија од трета степен ќе ја наречеме резолвентна равенка,

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} A_{4-k,\,k} \left(\frac{h'_x}{h'_y}\right)^{4-k} = 0, \left(h'_s = \frac{\partial h}{\partial s};\ s \equiv x, y \right), \tag{6'}$$

Оваа равенка е алгебарската равенка од четврта степен по t,

$$t^4 + p\ t^2 + qt + r = 0 \tag{7}$$

каде сме ставиле:

$$t = \frac{h'_x}{h'_y} + \frac{A_{31}}{A_{40}}$$

$$p = \frac{6}{A_{40}^2}\ (A_{40}\ A_{22} - A_{31}^2)$$

$$q = \frac{4}{A_{40}^4} (A_{40}^2\ A_{13} - 3\ A_{40} A_{22} A_{13} + 2\ A_{31}^3) \tag{7'}$$

$$r = \frac{1}{A_{40}^4} (A_{40}^3\ A_{04} - 4\ A_{40}^2\ A_{31}\ A_{13} + 6 A_{40}\ A_{31}^2\ A_{22} - 3\ A_{31}^4).$$

Решавајќи ја равенката (7) со метод на Ферари [5], можеме да ги добиеме сите можни случаи на решливост. Не само поради гломазноста на самата постапка, но повеќе поради тоа што меѓу нив нема суштинска разлика, ние овде ќе ја разгледаме дискусијата само во еден случај.

Нека равенката (7) има четири реални и различни решенија $t = t_i(x, y)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Тоа значи дека за одредување на функцијата $h(x, y)$ имаме четири линеарни парцијални равенки од прв ред

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left[-\frac{A_{31}}{A_{40}} + t_i(x, y) \right] \frac{\partial h}{\partial y} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

т. е.

$$A_{40} \frac{\partial h}{\partial x} = (A_{40}\ t_i - A_{31}) \frac{\partial h}{\partial y} \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

Бидејќи $h(x, y)$ е заедничка замена за $f(x, y)$ и $g(x, y)$, тогаш во (8) треба да се замени $h(x, y)$ еден пат со $f(x, y)$, а друг пат со $g(x, y)$, со што се добива следниот систем парцијални равенки

$$
(9) \qquad \begin{aligned} A_{40}\frac{\partial f}{\partial x} &= (A_{40}\ t_i - A_{31})\frac{\partial f}{\partial y} \\ A_{40}\frac{\partial g}{\partial x} &= (A_{40}\ t_j - A_{31})\frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned} \qquad (i,\ j=1, 2, 3, 4;\ i\neq j).
$$

Всушност имаме шест двојки равенки за определување на функциите $f(x, y)$ и $g\ (x, y)$ и со тоа шест избора на смените (f_i, g_i) со кои отпаѓаат членовите пред $z_{u^i}^{IV}$ и $z_{v^i}^{IV}$ т. е. $\alpha_{40}=\alpha_{04}$ 0.

На системата (9) и одговара следниот систем од обични диференцијални равенки, и тоа за $f\ (x,y)$ равенката

$$
(10) \qquad \frac{dx}{A_{40}\ (x,y)} = \frac{dx}{A_{40}\ (x,y)\ t_i\ (x,y) - A_{31}\ (x, y)}
$$

и за $g(x, y)$ равенката

$$
(11) \qquad \frac{dx}{A_{40}\ (x, y)} = \frac{dy}{A_{40}\ (x,y)\ \ t_j\ (x, y) - A_{31}\ (x,y)}\,.
$$

Ако $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$ соодветно се решенија на равенките (10) и (11), тогаш решението на првата равенка од (9) ќе биде

$$
f(x, y) = \Phi(C) = \Phi(\varphi(x, y)),
$$

а за втората

$$
g(x, y) = \theta(C) = \theta(\psi(x, y))
$$

од каде следува дека бараната смена ќе гласи

$$
\begin{aligned} u &= f(x, y) = \Phi(\varphi(x, y)) \\ v &= g\ (x, y) = \theta(\psi(x, y)\ ), \end{aligned}
$$

која го извршува бараниот ефект, сведување на константни коефициенти. Поради произволноста на Φ и θ следува дека не е битен бројот на случаите (9), бидејќи изборот на (u, v) и така е доволно произволен, што е заклучок и во [4].

Со вака определените (f, g), равенката (1), земајќи во обзир (6') и (9), се трансформира во равенката (3), каде се коефицентите $\alpha_{40} = \alpha_{04} = 0$.

Понатаму може да се заклучи дека барем еден од коефициентите $\alpha_{4-m,\, m} \neq 0$, $(m=1, 2, 3)$. Тоа може да се докаже и со непосредно пресметување, а се гледа и од следното: ако сите споменати коефициенти $\alpha_{4-m,\, m}$ се еднакви на нула, равенката (3) би се свела на равенка од трет ред, што не е можно, бидејќи тоа снижување на редот би можело да се продолжи и понатаму. Значи, смената е регуларна, т. е. равенката (1) со смената (2) може да се сведе на равенка со константни коефициенти (3). При тоа се можни два случаја:

1°. Нека $A_{00} \neq 0$. Тогаш во равенката (1) ефективно фигурира непознатата функција z, која со смената (2) се трансформира во (3) т. е. во равенка од ист вид.

Ако равенката (3) ја поделиме со коефициентот $A_{00} = \alpha_{00}$ и земајќи во обзир $\alpha_{04} = \alpha_{40} = 0$, се добива равенката:

$$\text{(3')} \qquad \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} a_{4-i,\, i} \frac{\partial^4 z}{\partial u^{4-i}\, \partial v^i} + \\ + \sum_{k=0}^{2} \sum_{i=0}^{3-k} \binom{3-k}{i} a_{3-k-i,\, i} \frac{\partial^{3-k} z}{\partial u^{3-k-i}\, \partial v^i} + z = 0$$

каде

$$\text{(12)} \qquad a_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{A_{00}} \; (i, j = 0, 1, 2, 3, 4;\; i+j = 1,2,3,\; 4)$$

Бидејќи $f(x, y)$ и $g(x, y)$ се наполно определени со (9), (10) и (11) во зависност од коефициентите A_{ij} $(i+j=4; i, j=0, 1, 2, 3, 4)$ од равенката (1), тогаш (12) претставува хомагена система за определување на A_{ij} $(i+j = 0, 1, 2, 3; i, j = 0, 1, 2, 3)$, кои зависат од f и g а со нив и од A_{40}, A_{31}, A_{22}, A_{13}, A_{04}.

Коефициентот A_{00} може да се определи од (12) за $i+j=4$ и $i, j = 1, 2, 3$, т. е.

$$A_{00} = \frac{\alpha_{31}}{a_{31}}, \quad A_{00} = \frac{\alpha_{22}}{a_{22}}, \quad A_{00} = \frac{\alpha_{13}}{a_{13}}.$$

Првиот и третиот услов се рамноправни, аналогни, во однос на f и (g) според тоа треба да важи

$$\text{(13)} \quad \text{const} = \frac{a_{31}}{a_{13}} = \frac{\alpha_{31}}{a_{13}} = \\ = \frac{\sum_{k=0}^{3} \sum_{i=0}^{1} \binom{3}{k} \binom{1}{i} A_{4-i-k,\, i+k} (f'_x)^{3-k} (f'_y)^k (g'_x)^{1-i} (g'_y)^i}{\sum_{k=0}^{1} \sum_{i=0}^{3} \binom{1}{k} \binom{3}{i} A_{4-i-k,\, i+k} (f'_x)^{1-k} (f'_y)^k (g'_x)^{3-i} (g'_y)^i}.$$