ЗА КОМПЛЕТНАТА РЕГУЛАРНОСТ НА ТОПОЛОШКИТЕ ГРУПИ

Н. Речкоски

Секоја тополошка група е униформизабилен простор. Секој униформизабилен простор е комплетно регуларен. Доказ може да се најде на пр. кај G. Köthe „Topological Vector Spaces I" стр. 47, 1969. Или кај Burbaki, „Topologie generale", chap, 9, theoreme 2. Hermann, 1949.

Исто така, постојат и докази кои не користат униформност. Во оваа работа заправо и даваме еден доказ од таков вид.

Теорема 1. *Во секоја тополошка група* $(G,.)$ *ако се дадени компактно множество* C *и затворено множество* F, *такви што* $C \cap F = \emptyset$, *тогаш постои непрекината функција* $f(x)$, *со вредности во* $[0, 1]$, *таква што* $f(x) = 0$, *за* $x \in C$ *и* $f(x) = 1$, *за* $x \in F$.

Доказ. Познато е дека ако C е компактно а F затворено множество при што $C \cap F = \emptyset$, постои симетрична околина U_0 — за неутралниот елемент $e \in G$, таква што $CU_0 \cap FU_0 = U_0C \cap U_0F = \emptyset$.

Нека U_0 биде така избраната околина а нека $V(1) = U_0 \cdot C$. Посматраме една низа од околини $\{U_n\}$ за неутралниот елемент со следната особина: $U_n^2 \subset U_{n-1}$. Нека D се сите дијадски дропки од интервалот $[0, 1]$. За $r \in D$ и $r = \frac{1}{2^n}$ ќе ставиме $V\left(\frac{1}{2^n}\right) = U_n C$. Претпоставуваме дека сме ги определиле сите множества од облик $V\left(\frac{k}{2^n}\right)$, каде што $k \leqslant 2^n$. $V\left(\frac{k'}{2^{n+1}}\right)$ го определуваме на следниот насин: ако е $k' = 2k$, тогаш $V\left(\frac{k'}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{k}{2^n}\right)$, ако пак k е непарен, т.е. $k' = 2k+1$, ставиме $V\left(\frac{k'}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = U_n V\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = U_n V\left(\frac{k}{2^n}\right)$. Сега ќе покажеме дека е $V\left(\frac{k}{2^n}\right) \subset V\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$. Навистина, нека е $k = 2m$; тогаш според конструкцијата е $V\left(\frac{k+1}{2^n}\right) = U_{n-1} V\left(\frac{k}{2^n}\right) \supset V\left(\frac{k}{2^n}\right)$. Аналогно се покажува ако е k непарен број. Нека сега $r_1,\ r_2 \in D,\ r_1 < r_2$; ќе покажеме дека $V(r_1) \subset V(r_2)$. Ќе ставиме $r_1 = \frac{r_1}{2^{n_1}}$, $r_2 = \frac{k_2}{2^{n_2}}$, $\frac{k_1}{2^{n_1}} < \frac{k_2}{2^{n_2}}$, $k_1 2^{n_2} < k_2 2^{n_1}$ односно $\frac{k_1 2^{n_2}}{2^{n_1+n_2}} < \frac{k_2 2^{n_1}}{2^{n_1+n_2}}$. Од предходното имаме:

$$V\left(\frac{k_1 2^{n_1}}{2^{n_1+n_2}}\right) \subset V\left(\frac{k_1 2^{n_2}+1}{2^{n_1+n_2}}\right) \subset \cdots \subset V\left(\frac{k_2 2^{n_1}}{2^{n_1+n_2}}\right),$$ после p-чекори, каде што е $k_1 2^{n_2} + p = k_2 2^{n_1}$. Но,

$$V(r_1) = V\left(\frac{k_1 2^{n_2}}{2^{n_1+n_2}}\right),\ \text{а}\ V(r_2) = V\left(\frac{k_2 2^{n_1}}{2^{n_1+n_2}}\right)$$

и следователно $V(r_1) \subset V(r_2)$.

Сега ја дефинираме реалната функција $f(x)$, на следниот начин;

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in D : x \in V(r)\}, \\ 1,\ \text{ако}\ x \notin V(1) \end{cases}$$

Бидејќи е $C \subset V\left(\frac{1}{2^n}\right)$ за секое n, затоа $f(c) = 0$, $c \in C$. Од друга страна $F \cap V(1) = 0$ и за тоа $f(x) = 1$, за $x \in F$. Според тоа, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Уште останува да докажеме непрекинатост на функцијата $f(x)$.

Нека $f(x) = 1$; тоа значи $x \notin V\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)$ а исто така $x \notin V\left(\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}}\right)$. Да ја посматраме околината $Un \cdot x$. Имаме $Un \cdot x \cap V\left(\frac{2^{n+1}-2}{2^n}\right) = \emptyset$, навистина, зашто во спротивен случај би имале $x \in (U_n)^{-1} V\left(\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}}\right) = U_n\ V\left(\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}}\right)$, зашто е U_n — симетрична околина. Но $U_n V\left(\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}}\right) = V = \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)$, што не е можно. Според тоа, за $y \in U_n\, x$, $\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}} \leqslant f(y) \leqslant 1$ или $|f(y) - f(x)| < \frac{2}{2^n}$. Нека сега претпоставиме дека $f(x) = \gamma$, $0 < \gamma < 1$.

Можеме да најдеме такво k што $\frac{k-1}{2^{n+1}} < f(x) < \frac{k}{2^{n+1}}$. $U_n x \cap V\left(\frac{k-2}{2^{n+1}}\right) = \emptyset$, защто во спротивен случај е $x \in U_n^{-1} V\left(\frac{k-2}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)$, што не е можно. Од друга страна е $U_n x \subset U_n V\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = V\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$. Кога $f(x) = 0$, непрекинатоста е очигледна.

Последица 1. *Секоја Хаусдорфова тополошка група G е комплетно регуларна.*

Доказ. Навистина нека $C = \{x\}$, $x \in U$, и $F = U'$, каде што U е отворена околина за x. U' е комплемент на U во G.

N. Rečkoski

DEMONSTRATION QUE TOUT GROUPE TOPOLOGIQUE EST COMPLETEMENT REGULIER

Dans cet article on donne une démonstration de la théorème connue que tout groupe topologique est complètement régulier.