МИЛАН С. ПОПАДИЋ

О УРЕЂЕНИМ МНОЖИНАМА СА КОНАЧНИМ ЛАНЦИМА

1. Изнећемо једно карактеристично својство множина са коначним ланцима. Претпостављамо да су појмови релације реда ($\leqslant$), уређене (тј. делимично уређене) множине, ланца (потпуно уређене множине) — познати. Додаћемо томе ради прецизности, још нека објашњења.

B је *права подмножина* множина A ако је задовољена релација $\Lambda \subset B \subset A$, где је Λ празна множина. У уређеној множини A елеменат $a \in A$ је *максималан (минималан)* ако за свако $x \in A$ важи релација $\sim (a < x)$ ($\sim (x < a)$), при чему симбол $\sim p$ значи негацију пропозиције p. Ако је A потпуно уређена множина максималан и минималан елеменат називају се *завршним* односно *почетним елементом (крајњи елементи)*.

Дефиниција 1. 1. Нека је $a, b \in A$*, при чему је A уређена множина. Множина $[a, b]_A$, за коју из релације $x \in A$, $a \leqslant x \leqslant b$ следује $x \in [a, b]_A$, назива се *сегментом* од A. Множина $(-, a]_A$ ($[a, -)_A$), за коју из релација $x \in A$, $x \leqslant a$ ($a \leqslant x$) следује $x \in (-, a]_A$ ($x \in [a, -)_A$), назива се *почетним (завршним) сегментом*.

Напоменимо да сегмент није никад празна множина.

Дефиниција 1. 2. Подмножина B уређене множине A, за коју из релације $a, b \in B$ следује $[a, b]_A \subseteq B$, назива се *комадом* множине A. Ако је за свако $a \in B$ такође $(-, a] \subseteq B$ ($[a, -)_A \subseteq B$), онда је B *почетни (завршни) комад* од A.

Јасно је да су сегменти, почетни и завршни сегменти неке множине такође комади исте множине.

Дефиниција 1. 3. *Максималним ланцем* уређене множине A назива се ланац B ако за сваки ланац C од A, који задовољава релацију $B \subseteq C$, важи релација $C = B$.

Напоменимо да егзистенција максималних ланаца у уређеним множинама следује из аксиоме избора (види на пример [1]).

Дефиниција 1. 4. *Двоструко разврстаном множином* назива се уређена множина A чији сваки непразан део садржи бар по један минималан и максималан елемент. Ако је

---

* $a, b \in A$ значи исто што и $a \in A$, $b \in A$.

A потпуно уређена множина онда је она и *двоструко добро уређена*.

2. Сада ћемо изнети неке ставове потребне за даље излагање.

Лема 2. 1. Сваки део двоструко разврстане множине је такође двоструко разврстан. Сваки њен ланац је двоструко добро уређен.

Став је очевидан.

Са $P(A)$ обележаваћемо партитивну множину множине A, тј. множину свих подмножина од A. Сваки систем множине сматраћемо да је уређен релацијом $\subseteq$.

Лема 2. 2. Нека је A двоструко разврстана множина, а $S(A)$ систем свих њених сегмената. Систем $S'(A) = S(A) \cap P(D)$, где је $D \subseteq M$, садржи, уколико није прозан, бар један максимални елеменат.

Доказ. Множина свих крајњих елемената сегмената ма ког максималног ланца F од $S'(A)$ образује ланац C од A. Према леми 2. 1, пошто је A двоструко разврстана множина, постоје крајњи елементи a и b од C. Дакле имамо

$$(2.1) \qquad [a, b]_A \in S(A).$$

Елементи a и b припадају по једном сегменту из ланца F, тј. постоје сегменти X_1, $X_2 \in F$ такви да је $a \in X_1$ и $b \in X_2$ а, због упоредивости елемената X_1 и X_2 имамо рецимо $X_1 \subseteq X_2$ одакле је $a, b \in X_2$. Како је даље $F \subseteq S'(A) \subseteq P(D)$, такође је $X_2 \in P(D)$ односно $X_2 \subseteq D$ те, због $[a, b]_A \subseteq X_2$, имамо $[a, b]_A \subseteq D$ и најзад $[a, b]_A \in P(D)$. Одавде и из релације (2. 1) следује $[a, b]_A \in S'(A)$. Сада се лако доказује да је $[a, b]_A$ завршни сегмент од F, а такође и максималан од $S'(A)$.

Лема 2.3. Ако комад B уређене множине A нема ниједног макскималног (минималног) елемента, онда ни множина $S(B)$ свих сегмената од B нема максималног елемента.

Став је очевидан.

3. Сада ћемо показати, што је и циљ ове радње, да је за двоструко разврстане множине карактеристичан један облик индуктивног закључивања. Ради се о следећим исказима:

Пройозиција 3. 1. Множина M је двоструко разврстана.

Пройозиција 3. 2. За уређену множину M и множину N из услова:

1. постоји сегмент A множине M који задовољава релацију $A \subseteq N$;

2. за сваки сегмент B од M који задовољава релације $B \subset M$, $B \subseteq N$, постоји сегмент C од M за који је $B \subset C \subseteq N$ — следује $C \subseteq N$.

Теорема 3. 1. *Пропозиције* 3. 1 *и* 3. 2 *су еквиваленте.*

Доказ. Прво ћемо показати да из пропозиције 3. 1. следује пропозиција 3. 2. Нека је M двоструко разврстана множина и нека су услови пропозиције 3. 2 задовољени, али претпоставимо да је ипак

$$\sim (M \subseteq N). \tag{3. 1}$$

Одавде следује да множина $D = M \cap N$ задовољава релације

$$D \subset M \tag{3. 2}$$

и $D \subseteq N$. Према услову 1 пропозиције 3. 2 постоји сегмент A од M за који је $A \subseteq N$, па према томе и $A \subseteq D$, што значи да и систем $P(D)$ садржи бар један сегмент. Ако је $S(M)$ систем свих сегмената од M множина $S' M = S(M) \cap P(D)$ садржи бар један сегмент од M. На основу леме 2. 2 постоји бар један максималан елеменат B у $S'(M)$. Из $B \in S'(M)$ следује $B \in P(D)$ и $B \subseteq D$, а због (3. 2) и $B \subset M$. Међутим према услову 2 пропозиције 3. 2 постоји сегмент C од M који задовољава релацију

$$B \subset C \subseteq N. \tag{3. 3}$$

Отуда следује $C \subseteq D$, односно $C \in P(D)$ и, због $C \in S(M)$ имамо $C \in S'(M)$. Одавде, пошто је B максималан елеменат од $S'(M)$, следује $\sim (B \subset C)$ што противречи релацији (3. 3). Дакле претпоставка (3. 1) је неодржива, а пропозиција 3. 2 доиста повлачи пропозицију 3. 1.

Нека је сада пропозиција 3. 2 истинита, али претпоставимо да M ипак није разврстана множина. Дакле постоји нека непразна подмножина D од M која нема на пример ниједног максималног елемента. Јасно је да и комад $D' = \bigcup_{x \in D} (-, x]_M$ такође нема ниједног максималног елемента. Нека је најзад N прави завршни комад од D, тј. $\Lambda \subset N \subset D'$, односно

$$\Lambda \subset N \subset M, \tag{3. 4}$$

који такође нема максималних елемената. С обзиром на ово јасно је да је услов 1 пропозиције 3. 2 задовољен за множине M и N. Нека је даље B сегмент од M који задовољава релације $B \subset M$, $B \subseteq N$. Пошто је N комад (комад N комада D' од M је такође комад од M), на основу леме 2. 3 постоји сегмент C од M за који је $B \subset C \subseteq N$, то значи да је и услов 2 пропозиције 3. 2 задовољен. Отуда би следовало да је $M \subseteq N$, што противречи релацији (3. 4). Дакле претпоставка да M није двоструко разврстана множина неодржива је, пропозиција 3. 2 повлачи пропозицију 3. 1. Тиме ја теорема у потпуности доказана.

Напоменимо да став 1, доказан у раду [2], претставља специјалан случај овде изложене теореме, тј. случај када је M потпуно уређена множина.

БИБЛИОГРАФИЈА

1. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Verlag Von Veit und Comp., Leipzig, 1914. Стр. 140—141.

2. Milan S. Popadić, Jedno karakteristično svojstvo konačnih množina. Годишен зборник на филозофскиот факултет на Универзитетот во Скопје, Природно математички оддел, Книга 4 (1951), № 6.

Milan S. Popadić

ON ORDERED SETS WITH FINITE CHAINS

(Summary)

1. At first we are going to expose some explanations and definitions. The main result is exposed in the paragraph 3 (the theoreme 3. 1).

If p is *a* proposition $\sim p$ is the negation of p. B is proper subset of the set A, if is satisfied the relation $\Lambda \subset B \subset A$ (Λ – the empty set). In an ordered (i. e. partially ordered) set A, $a \in A$ is a *maximal (minimal) element,* if for each $x \in A$ holds $\sim (a < x)$ $(\sim (x < a))$. In a simply ordered set the maximal (minimal) element is *initial (final) element.*

If is a, $b \in A$ (i. e. $a \in A$, $b \in A$), wher A is an ordered set, the *segment* $[a, b]_A$ is a agregate of $x \in A$, satisfying $a \leqslant x \leqslant b$. The *initial (final) segment* $(-, a]_A$ $([a, -)_A)$ is *a* set of $x \in A$, satisfying $x \leqslant a$ $(a \leqslant x)$. The *section* B of A is a subset of A, for which from the relation $a, b \in A$ follows $[a, b]_A \subseteq B$. In the same way are defined the *initial (final) section* It is clear that the each segment of an ordered set A is a section of A. The segment is never the empty set.

A *maximal chain* of an orered set A is every maximal element of system of all chains of A (this system being ordered by the relation $\subseteq$).

Definition 1. 1. By a *partially double well-ordered set* is meant an ordered aggregate each subset of which has minimal and maximal elements. *A double well-ordered set* is a simply ordered set with the initial and final element.

It is clear that each subset of a double well-ordered set has extreme elements (a initial and a final element).

2. The following lemmae it is easy to prove.

Lemma 2. 1. Each nonvoid subset of a parially double well-ordered set is a partially double well-ordered set. Each chain of this set is a double well-ordered set.

By $P(A)$, where A is a set, is meant the aggregate of al the subsets of A. We suppose that every system of sets is ordered by the relation $\subseteq$.

Lemma 2. 2. Let A is a partially double well-ordered set, and $S(A)$ the system of all segments of A. The nonvoid aggregate $S'(A) = S(A) \cap P(D)$, where is $D \subseteq A$, contains at least one maximal element.

Lemma 2. 3. If a section B of an ordered set A has no maximal (or minimal) element, then the system $S(B)$ of all segments of B has too no maximal element.

3. Now we are going to show that for partially double well-ordered sets is characteristic a form of the induction principle. In the fact we deal with the following two propositions:

Proposition 3. 1. M is a partially double well-ordered set;

Proposition 3. 2. For an ordered set M and any set N, from the conditions:

1. there is a segment A of M, satisfing the relation $A \subseteq N$;

2. For every segment B of M, satisfying the relations $B \subset M$, $B \subseteq N$, there is a segment C of M, satisfying $B \subset C \subseteq N$

— it follows $M \subseteq N$.

Theorem 3. 1. *The propositions* 3. 1 *and* 3. 2 *are equivalent.*

Proof. First let the proposition 1. 3 be true, and let the conditions 1 and 2 of the proposition 2. 3 are satisfied, but let us assume that

$$\sim (M \subseteq N). \tag{3. 1}$$

Hence it follows that the set $D = M \cap N$ satisfies

$$D \subset M \tag{3. 2}$$

and $D \subseteq N$. According to the condition 1 of the proposition 3. 2, there is a segment A of M, sitisfying $A \subseteq N$ and thus $A \subseteq D$. It signifies that the system $P(D)$ contains at least one segment. If $S(M)$ is the system of all segments of M, the set $S'(M) = S(M) \cap P(D)$ contains too a segment of M. According to the lemma 2. 2 it follows that in the set $S'(M)$ there is at least one maximal element B. From $B \in S'(M)$ we have $B \in P(D)$ and $B \subseteq D$, and, because of (3. 2), $B \subset M$ too. However, according to the condition 2 of the proposition 3. 2, there is a segment C of M, satisfying

$$B \subset C \subseteq N. \tag{3. 3}$$

Hence it follows $C \subseteq D$, i. e. $C \in P(D)$, and, for $C \in S(M)$, we obtain $C \in S'(M)$. Because B is a maximal element of $S'(M)$ then is $\sim (B \subset C)$, which contradicts the relation (3. 3). Thus the hypothesis (3. 1) is false, hwence one obtain that the proposition (3. 2) follows from the proposition (3. 1).

Now let the proposition (3. 2) be true for a ordered set M, but let us assume that M is not a partially double well-ordered set. Thus there is a nonemply subset D of M, which has no maximal (or minimal) elements. It is clear that the section $D' = \underset{x \in D}{U} (-, x]_M$ has too no maximal elements. Finally let N be a proper final section of D', i. e. N satisfies $\Lambda \subset N \subset D'$ and

$$\Lambda \subset N \subseteq M. \tag{3. 4}$$

N has, of course, no maximal elements. At first it is clear that the condition 1 of the proposition 3. 2 is satisfied. Let B be a segment of M, satisfying $B \subset M$ and $B \subseteq N$. Because N is a section of M (a section of a section of M is a section of M), according to the lemma 2. 3, there is a segment C of M, satisfying $B \subset C \subseteq N$. The condition 2 of the proposition 3. 2 is setisfied too. Hence it follows $M \subseteq N$ which contradicts the relation (3. 4). Thus from the proposition 3. 2 it follows the proposition 3. 1.

Let us remark that the theorem, proved in the paper [2]*, is a special case of the theorem 3. 1, i. e. when M is a simply ordered set.

* See References ad the end of the original paper.