MILAN S. POPADIĆ

JEDNO KARAKTERISTIČNO SVOJSTVO KONAČNIH MNOŽINA

1. Pre no što formulišemo sam problem daćemo prethodno neka objašnjenja, navešćemo izvesne definicije i pomoćne stavove.

Množinu u kojoj je definisana relacija $\leqslant$, čija su karakteristična svojstva dobro poznata, nazvaćemo *uređenom množinom*. Ako za svaka dva elementa a i b od A važi bar jedna od relacija $a \leqslant b$, $b \leqslant a$, A je *potpuno uređena množina*. Množina od jednog elementa takođe je potpuno uređena.

Definicija 1. Neka su a i b, $a \leqslant b$, elementi množine A, množina $[a, a]_A$ svih elemenata $x \in A$, za koje važi relacija $a \leqslant x \leqslant b$, naziva se *segmentom* množine A. a i b su *krajnji elementi* segmenta.

Definicija 2. *Komadom* množine A naziva se svaka podmnožina B od A, za koju iz relacija $a \in B$, $b \in B$ sleduje $[a, b]_A \subseteq B$. *Pravi komad* je komad od A koji je prava podmnožina od A.

Napominjemo da prava podmnožina B od A zadovoljava relacije $\Lambda \subset B \subset A$, pri čemu Λ označava praznu množinu. Takođe jasno je da je i segment neke množine njen komad.

Definicija 3. *Dvostruko dobro uređena množina* je uređena množina čiji svaki deo ima krajnje elemente.

Napominjemo da su krajnji elementi početni i završni elemenat. Početni (završni) elemenat uređene množine A je, kao što je poznato, elemenat a za koji iz relacije $x \in A$ sleduje $a \leqslant x$ $(x \leqslant a)$. Dvostruko dobro uređena množina je takođe potpuno uređena. Množina od jednog elementa je takođe dvostruko dobro uređena množina.

Sada ćemo dokazati neke stavove.

Lema 1. Svaki komad dvostruko dobro uređene množine jeste segment te množine.

Stav je očevidan.

Lema 2. Neka je S izvestan sistem komada potpuno uređene množine A, i $B \subseteq A$ komad od A koji je jednovremeno podmnožina svakog elementa od S. Tada je $\bigcup_{X \in S} X = X'$ komad od A za koji važi takođe relacija $B \subseteq X'$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da iz relacija

(1) $$a \in X', \qquad b \in X'$$

sleduje $[a, b]_A \subseteq X'$, odnosno da iz $x \in [a, b]_A$ sleduje $x \in X'$. Najpre jasno je da za svako $X \in S$, zbog $B \subseteq X$, imamo $B \subseteq X'$. Dalje iz (1) i relacije $\bigcup_{X \varepsilon S} X = X'$, izlazi da postoje komadi $X_1 \in S$ i $X_2 \in S$ za koje je

(2) $$a \in X_1, \qquad b \in X_2,$$

a takođe

(3) $$B \subseteq X_1, \qquad B \subseteq X_2.$$

Ako je $c \in B$, odnosno zbog (3)

(4) $$c \in X_1, \qquad c \in X_2,$$

parovi c, a i c, b određuju (kao krajnji elementi) dva segmenta takva da svako $x \in [a, b]_A$ pripada bar jednom od njih. Međutim kako je zbog (2) i (4) segment, određen elementima c i a, sadržan u komadu X_1, segment određen sa c i b - sadržan u X_2, sleduje da je ili $x \in X_1$ ili $x \in X_2$, a u svakom slučaju $x \in X'$. Time je lema dokazana.

Lema 3. Ako je svaki pravi komad potpuno uređene množine A segment, onda je ona dvostruko dobro uređena. (Ovaj stav važi i za parcijalno uređene množine).

Lema 4. Za svaki segment B potpuno uređene množine A koja nije segment, postoji segment C od A za koji je $B \subset C$.

Dokazi ovih lema su jednostavni.

Napominjemo još da će nam ubuduće simbol $P(A)$ označavati partitivnu množinu (množinu svih podmnožina) od A, a *non* p — negaciju propozicije p.

2. Sada ćemo formulisati problem.

Radi se o sledećim propozicijama:

Propozicija I. Neprazna množina M je dvostruko dobro uređena.

Propozicija II. Za potpuno uređenu množinu M iz uslova:

1. Postoji segment A od M za koji važe relacije $\Lambda \subset A \subseteq M$ i $A \subseteq N$, pri čemu je N proizvoljna množina;

2. Za svaki segment B od M, za koji je $\Lambda \subset A \subset M$ i $B \subseteq N$, postoji segment C od M koji zadovoljava relacije $B \subset C \subseteq M$ i $C \subseteq N$

— sleduje $M \subseteq N$.

Propozicija II pretstavlja ustvari specijalan slučaj principa indukcije koji, kako ćemo pokazati, važi samo za dvostruko dobro uređene množine.

Stav 1. Popozicije I i II su ekvivalentne.

Dokaz. — Neka je najpre tačna propozicija I i neka su zadovoljeni uslovi propozicije II, ali pretpostavimo da i pri tome nije $M \subseteq N$ već

(1) $$non\ (M \subseteq N).$$

Iz uslova 1 propozicije II sleduje $A \subseteq M \cap N = D$, a zatim, zbog $\Lambda \subset A$, takođe je

(2) $$\Lambda \subset D \subseteq M, \quad D \subseteq N.$$

Napomenimo prvo da je

(3) $$D \neq M,$$

jer bi, da je $D = M$, bilo $M \subseteq N$, što protivreči pretpostavci (1). Dakle imamo

(4) $$D \subset M, \ D \subseteq N.$$

Ako je dalje S sistem svih segmenata od M koji sadrže kao podmnožinu segment A, množina $S' = S \cap P(D)$, pretstavlja izvestan potsistem od S i, prema lemama 2 i 1, $\bigcup_{X \varepsilon S'} X = B$ je segment od M. Kako je uz to za svako $X \in S$ i $A \subseteq X$ sleduje

(5) $$\Lambda \subset A \subseteq B.$$

Pošto je $S' \subseteq P(D)$ imamo $\bigcup_{X \varepsilon S'} X \subseteq \bigcup_{X \varepsilon P(D)} X = D$ odnosno $B \subseteq D$. Odavde i iz relacija (4) i (5) imamo $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$. Međutim na osnovu usluva 2 propozicije II postoji segment C takav da je

(6) $$B \subset C \subseteq M, \qquad C \subseteq N.$$

Odavde sleduje $C \subseteq M \cap N = D$, zatim $C \in P(D)$, a takođe, pošto je zbog (5) i (6) $A \subset C$ i $C \in S$. Tako se dobija da je $C \in S'$ i $C \subseteq B$, što protivreči prvoj od relacija (6). Zbog ove protivrečnosti osnovna pretpostavka (1) je neodrživa. Dakle propozicija II je posledica propozicije I.

Neka je sada propozicija II tačna za potpuno uređenu množinu $M \supset \Lambda$, ali pretpostavimo da i pri tome M nije dvostruko dobro uređena množina. Zbog leme 3 mora postojati bar jedan pravi komad N od M, koji nije segment. Dakle imamo

$$(7) \qquad \Lambda \subset N \subset M.$$

Odavde sleduje da postoji segment A za koji je $\Lambda \subset A \subseteq M$, $A \subseteq N$, tj. uslov 1 propozicije II je ispunjen. Dalje neka je B segment od M koji zadovoljava relacije

$$(8) \qquad \Lambda \subset B \subset M, \qquad B \subseteq N.$$

Međutim pošto N nije segment, na osnovu leme 4 postoji segment C takav da je $B \subset C \subseteq N$, a zbog (7) imamo i $C \subseteq M$. Dakle iz (8) sleduje da postoji segment C za koji važe relacije $B \subset C \subseteq M$, $C \subseteq N$, što znači da je i uslov 2 propozicije II zadovoljen. Odavde sleduje relacija $M \subseteq N$, što protivreči relaciji (7). Dakle učinjena pretpostavka je neodrživa, iz čega sleduje da je M dvostruko dobro uređena množina. Na taj način je dokazano da iz propozicije II sleduje propozicija I, a time i tačnost stava 1.

3. Kao što je poznato ima vrlo različitih definicija konačnih množina* čija je ekvivalencija dokazana bilo sa ili bez pomoći aksiome izbora. Poznata Dedekind-ova definicija glasi:

Definicija 4. Množina A je *konačna*, ako za svako obostrano jednoznačno preslikovanje φ množine A na samu sebe, važi relacija $\varphi(A) = A$ [$\varphi(A)$ pretstavlja množinu onih elemenata od A na koje su, pri preslikavanju φ, preslikani svi elementi od A].

E. Zermelo** je pokazao, oslanjajući se na aksiomu izbora, da je ova definicija ekvivalentna definiciji:

Definicija 5. Množina A je konačna ako se može dvostruko dobro urediti.

Iz ove primedbe i prethodnih izlaganja sleduje da se za definiciju konačne množine može uzeti i sledeći iskaz:

Definicija 6. Množina A je konačna ako se može potpuno urediti tako da je za nju propozicija II istinita.

---

* A. Tarski *Sur les ensembles finis. Fundamenta mathematicae*, T. 6. 1925. Str. 45—95.

** E. Zermelo, *Sur les ensembles finis et le principe de l'induktion complète. Acta mathematica*, T. 32 1909. Str. 185—193.

Milan S. Popadić

A CHARACTERISTIC PROPERTY OF FINITE SETS

(Summary)

We suppose that the notion of the ordered (partly ordered) set and one of the simply ordered set is known. In an ordered set A the aggregate of x satisfing $a \leqslant x \leqslant b$ is called the *segment* $[a, b]_A$ of A. The *section* of an ordered set A is any subset of A, for which from the relations $a \in A$, $b \in A$ follows $[a, b]_A \subseteq B$. The section B of A, satisfying $\Lambda \subset B \subset A$ (Λ — empty set) is called the *proper section*. It is clear that each segment of an ordered set A is a section of A. Finally by a *double well-ordered set* is meant an ordered set each subset of which has the extreme elements (the „least" element and the „greatest" one).

The exactness of the following lemmas is obvious.

Lemma 1. *Any section of a double well-ordered set is its segment.*

Lemma 2. *Let S is a class of sections of a simply ordered set* A, *and* $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ *a section of* A *contained in each element of* S. *The set* $\bigcup\limits_{X \varepsilon S} \mathrm{X} = \mathrm{X}'$ *is a section of* A, *satisfying* $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}'$.

Lemma 3. *If each proper section of a simply ordered set* A *is a segment, than* A *is double well-ordered set.*

Lemma 4. *For each segment* B *of a simply ordered set* A *not being a segment, there exists a segment* C *of* A, *satisfying* $\mathrm{B} \subset \mathrm{C}$.

By $P(A)$ we shall denote the class of all the subsets of a set A, and *non p* means the negation of a proposition p.

2. We deal with the folloving two propositions:

Proposition I. *The nonempty set* M *is double well-ordered set.*

Proposition II. *For any simply ordered set* M *and any aggregate* N *from the conditions*:

1. *There is a segment* A *of* M, *satisfying the relations* $\Lambda \subset \mathrm{A} \subseteq \mathrm{M}$ *and* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{N}$;

2. *For any segment* B *of* M, *satisfying* $\Lambda \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{M}$ *and* $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{N}$, *there exists a segment* C *of* M, *satisfying* $\mathrm{B} \subset \mathrm{C} \subseteq \mathrm{M}$, $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{N}$

— *it follows* $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$.

Theorem. The propositions I *and* II *are equivalent*

Proof. First let the proposition I be true, and let the conditions 1 and 2 of the proposition II be satisfied, but yet let us assume that is

$$non\ (M \subseteq N). \tag{1}$$

From the condition 1 of the proposition II it follows $A \subseteq M \cap N = D$, and then since $\Lambda \subset A$, we have

$$\Lambda \subset D \subseteq M, \qquad D \subseteq N. \tag{2}$$

Moreover one has

$$D \neq M. \tag{3}$$

Indeed if $D = M$, then $M \subseteq N$ which contradichs our hypothesis (1). Thus we have

$$D \subset M,\ D \subseteq N. \tag{4}$$

Now if S is a system of all the segments of M, containing the segment A, and $S' = S \cap P(D)$, then it follows from the lemmas 1 and 2 that $B = \bigcup_{X \varepsilon S} X$ is segment of M too. Since for each $X \in S$ is $A \subseteq X$, one has

$$(5) \qquad \Lambda \subset A \subseteq B.$$

From $S' \subseteq P(D)$ we obtain $\bigcup_{X \varepsilon S'} X \subseteq \bigcup_{X \varepsilon P(D)} X = D$ and $B \subseteq D$. Hence and from (4) and (5) one obtains $\Lambda \subset B \subset M$, $B \subseteq N$. But according to the condition 2 of the proposition II, there exists a segment C satisfying

$$(6) \qquad B \subset C \subseteq M, \qquad C \subseteq N.$$

Then we have $C \subseteq M \cap N = D$, whence $C \in P(D)$ and becanse of (5) and (6), $A \subset C$ and $C \in S$. Also we obtain $C \in S'$ and $C \subseteq B$, which is contrary to the relation (6). Because of this contradiction the hypothesis (1) is false, hwence one obtains that the proposition II follows from the proposition I.

Now let the proposition II be true for any simpy ordered set $M \supset \Lambda$, but yet let us assume that M is not a double well-ordered set. Because of lemma 3 there exists a proper section N of M not being a segment. Thus we get

$$(7) \qquad \Lambda \subset N \subset M.$$

Hence it follows that there exists a segment A of M, satisfying $\Lambda \subset A \subseteq M$, $A \subseteq N$, i. e. the condition 1 of the proposition II is satisfied. If B is a segment of M satisfying

$$(8) \qquad \Lambda \subset B \subset M, \qquad B \subseteq N,$$

and since N is not a segment, it follows from the lemma 4 that there exists a segment C satisfying $B \subset C \subseteq N$ and, because of (7), $C \subseteq M$. Thus because of (8) there exists the segment C satisfying the relations $B \subset C \subseteq M$, $C \subseteq N$, i. e. the condition 2 of the proposition II is satisfied. Hence it follows $M \subseteq N$, which contradicts the relation (7). Thus each section of M is a segment and, because of lemma 3, M is a double well-ordered set. The proposition I implies the proposi.ion II.

According to a result obtained by E. Zermelo*, a set A is finit (in Dedekind's meaning) if and only if it can be double well-ordered (this is proved by using the axiom of choice). Hence it is clear that one can for a definition of a finite set take the following proposition:

Definition. A set is finite if it may be simply ordered such that for him holds the proposition II.

* See the footnote ** in the original text.