MILAN S. POPADIĆ

O BROJU LANACA U KONAČNIM PARTITIVNIM MNOZINAMA

Partitivna množina $P(A)$ množine A (sistem svih podmnožina od A) uređena je relacijom inkluzije $\subseteq$. Ako je A konačna množina, isti je slučaj i sa množinom $P(A)$. Dužinom jednog lanca (potpuno uređena množina) od $P(A)$ nazvaćemo broj njegovih elemenata. Ako je A konačna množina, ta definicija uvek ima smisla. Pošto su $P(A)$ i $P(B)$ izomorfne množine čim A i B imaju isti broj elemenata - recimo n - obeležavaćemo njihov tip sa $P(n)$. U ovom radu odredićemo koliko ima lanaca dužine $k \leqslant n+1$ u množini tipa $P(n)$.

Svaki elemenat množine $P(A)$ tipa $P(n)$ je podmnožina od A te sadrži izvestan broj elemenata od A. Taj broj nazvaćemo rangom tog elementa. Jasno je da je prazna množina Λ elemenat najnižeg ranga - ranga 0, a množina A - elemenat najvišeg ranga, tj. ranga n.

Elemenata ranga $m \leqslant n$ ima $\binom{n}{m}$; obeležavaćemo ih sa a_m ili a_{mj} ako ih je dato više od jednog.

Simbol $C(n, k)$ označavaće broj lanaca dužine k u množini tipa $P(n)$. Imamo $C(n, 1) = 2^n$ (to je granični slučaj kada svaki lanac sadrži samo jedan elemenat), a takođe lako se dokazuje da je broj maksimalnih lanaca (lanci koji sadrže maksimalni broj elemenata - dakle $n+1$) $C(n, n+1) = n!$

Segmentom $[a, b]$ uređene množine nazvaćemo množinu svih elemenata x za koje je $a \leqslant x \leqslant b$, a množina $[a, b)$ označavaće, kao što je uobičajeno, množinu $[a, b]$ bez elementa b.

Izvešćemo najpre formulu za broj svih lanaca dužine k u množini $[\Lambda, a_{i+1})$, pa ćemo je iskoristiti za dobijanje krajnjeg rezultata. Elementu a_{i+1} neposredno prethodi $i+1$ elemenata a_{ij}, $j = 1, 2, \cdots, i+1$, koji određuju sistem S od isto toliko segmenata $[\Lambda, a_{ij}]$ tipa $P(i)$. Svaki od ovih segmenata sadrži $C(i, k)$ lanaca dužine k. Međutim svi segmenti nekog potsistema od S sa r elemenata, sadrže jedan zajednički segment tipa $P(i-r+1)$ i, ako je $i-r+2 \geqslant k$, oni sadrže $C(i-r+1, k)$ zajedničkih lanaca dužine k. Sada lako dobijamo sledeće rezultate.

Segment $[\Lambda, a_{i_1}]$ sadrži $C(i, k)$ lanaca. Kako segmenti $[\Lambda, a_{i_1}]$ i $[\Lambda, a_{i_2}]$ imaju zajednički segment tipa $P(i-1, k)$, koji sadrži $C(i-1, k)$ lanaca, onda u množini $[\Lambda, a_{i_2}]$ ima $C(i, k)-C(i-1, k)$ lanaca dužine k, koji ne pripadaju množini $[\Lambda, a_{i_1}]$. Na sličan se način može dobiti broj lanaca u množini $[\Lambda, a_{i_3}]$, koji ne pripadaju ranije navedenim segmentima: $C(i, k)-2C(i-1, k)+C(i-2, k)$.

Tako se može pokazati (indukcijom) da se dobija sledeći niz od $i+1$ izraza:

$$C(i, k),$$

$$C(i, k)-C(i-1, k),$$

$$C(i, k)-2C(i-1, k)+C(i-2, k),$$

— — — — — — — — — — —

$$C(i, k)-\binom{i-k+1}{1}C(i-1, k)+\binom{i-k+1}{2}C(i-2, k)-\cdots$$
$$+(-1)^{i-k+1}\binom{i-k+1}{i-k+1}C(k-1, k),$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$C(i, k)-\binom{i}{1}C(i-1, k)+\binom{i}{2}C(i-2, k)-\cdots$$
$$+(-1)^{i-k+1}\binom{i}{i-k+1}C(k-1, k).$$

Sabirajući ove izraze dobija se formula

$$(i+1)\,C(i, k)-\binom{i+1}{2}C(i-1, k)+\binom{i+1}{3}C(i-2, k)-\cdots$$
$$+(-1)^{i-k+1}\binom{i+1}{i-k+2}C(k-1, k)$$

$$=\sum_{j=1}^{i-k+2}(-1)^{j-1}\binom{i+1}{j}C(i-j+1, k),$$

koja pretstavlja broj svih lanaca dužine k u množini $[\Lambda, a_{i+1})$. Međutim ovaj izraz pretstavlja i broj svih lanaca dužine $k+1$, čiji je završni elemenat a_{i+1}. Kako elemenata istog ranga — tj. ranga $i+1$ — ima $\binom{n}{i+1}$, služeći se prethodnim rezultatom, dobija se za broj svih lanaca dužine $k+1$ u množini tipa $P(n)$, sledeća rekurentna formula

$$(1)\quad C(n, k+1) = \sum_{i=k-1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-k+2} (-1)^{j-1} \binom{n}{i+1} \binom{i+1}{j} C(i-j+1, k),$$

pri čemu je $n \geqslant k$.

Koristeći se ovom formulom dokazaćemo indukcijom da je konačni rezultat

$$(2)\qquad C(n, k) = \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{k-1}{s} (k+1-s)^n,$$

pri čemu je $n+1 \geqslant k$.

Pre svega se lako dobija iz (2)

$$C(n, 1) = 2^n,$$

što znači da je obrazac (2) za $k=1$ tačan. Pretpostavimo sada da je tačan i za vrednost $k=m$, tj. da važi relacija

$$(3)\qquad C(l, m) = \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} (m+1-s)^l$$

za svako $l \geqslant m$. Iz formula (1) i (3) dobija se

$$C(n, m+1) =$$

$$\sum_{i=m-1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-m+2} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{s+j-1} \binom{n}{i+1} \binom{i+1}{j} \binom{m-1}{s} (m+1-s)^{i-j+1}.$$

Posmatraćemo pojedine delove ovog izraza. Najpre imamo

$$\sum_{j=1}^{i-m+2} (-1)^{j-1} \binom{i+1}{j} (m+1-s)^{i-j+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j-1} \binom{i+1}{j} (m+1-s)^{i-j+1}$$

$$- \sum_{j=i-m+3}^{i+1} (-1)^{j-1} \binom{i+1}{j} (m+1-s)^{i-j+1}$$

$$= (m+1-s)^{i+1} - (m-s)^{i+1} - \sum_{j=i-m+3}^{i+1} (-1)^{j-1} \binom{i+1}{j} (m+1-s)^{i-j+1}.$$

Množeći prvi i poslednji član ove dvostruke jednakosti sa $(-1)^s \binom{m-1}{s}$, i sabirajući po s, dobija se

$$\sum_{j=1}^{i-m+2} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{s+j-1} \binom{i+1}{j} \binom{m-1}{s} (m+1-s)^{i-j+1}$$

$$\text{(4)} \qquad = \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} \left[(m+1-s)^{i+1} - (m-s)^{i+1} \right]$$

$$- \sum_{j=i-m+3}^{i+1} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{s+j-1} \binom{m-1}{s} \binom{i+1}{j} (m+1-s)^{i-j+1}.$$

Kako je

$$\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} \left[(m+1-s)^{i+1} - (m-s)^{i+1} \right]$$

$$= \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+1-s)^{i+1},$$

a zbog $i-m+3 \leqslant 1$, odnosno $i-j+1 < m-1$

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m-1}{s} (m+1-s)^{i-j+1} = 0^*,$$

relacija (4) svodi se na relaciju

$$\sum_{j=1}^{i-m+2} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{s+j-1} \binom{i+1}{j} \binom{m-1}{s} (m+1-s)^{i-j+1}$$

$$= \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+1-s)^{i+1}$$

Odavde se odmah dobija

$$(5) \quad C(n, m+1) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{i=m-1}^{n-1} (-1)^s \binom{m}{s} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1}.$$

Dalje je

$$\sum_{i=m-1}^{n-1} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1}$$

$$- \sum_{i=0}^{m-2} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1} = (m+2-s)^n - \sum_{i=0}^{m-2} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1}.$$

Otuda sleduje, posle zamene ovog izraza u (5),

$$(6) \quad \begin{aligned} C(n, m+1) &= \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+2-s)^n \\ &- \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} \binom{n}{i+1} (m+1-s)^{i+1}. \end{aligned}$$

---

* Eugen Netto, *Lehrbuch der Kombinatorik*, Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1901. Str. 249, formula (17).

Najzad pošto je zbog $i \leqslant m-2$, odnosno $i+1 < m$

$$\sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+1-s)^{i+1} = 0^*,$$

formula (6) svodi se na izraz

$$C(n, m+1) = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} (m+2-s)^n,$$

što pokazuje da je obrazac (2) tačan i za $k=m+1$, čim je to slučaj i za $k=m$. Prema tome on važi i u opštem slučaju.

Napomenimo da se iz (2) lako dobija broj maksimalnih lanaca — tj. formula

$$C(n, n+1) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} (n+2-s)^n = n!^{**},$$

što se slaže sa ranijom napomenom.

---

* Vidi belešku na str. 7.

** Vidi belešku na str. 7.

Milan S. Popadić

ON THE NUMBER OF CHAINS IN A KIND OF ORDERED FINITE SETS

(Summary)

A class $P(A)$ of all the subsets of any aggregate A is ordered (partly ordered) by the inclusion relation $\subseteq$. We shall consider only finite sets. The sets $P(A)$ and $P(B)$ are isomorphic if and only if the aggregates A and B have the same number of elements. We denote by $P(n)$ the type of every class $P(A)$, when A contains n elements. Also by $a_i \in P(A)$ we denote each subset of A, containing i elements; i is the rank of a_i.

A chain of the ordered set A is any simply ordered subset of A. The length of a chain is the number of its elements.

Finally by the segment $[a, b]$ of a ordered set A we mean the set of all $x \in A$ satisfying $a \leqslant x \leqslant b$ (or in our paper $a \subseteq x \subseteq b$). The set $[a, b)$ is the $[a, b]$ without element b.

In this paper we deduce a formula for the number $C(n, k)$ of all chains of length k in the ordered set of type $P(n)$. It may easily be verified that $C(n, 1)=2^n$ and $C(n, n+1)=n!$

At first we are going to determine the number of all chains of length k in the set $[\Lambda, a_{i+1}) \subseteq P(A)$, $i \leqslant n-1$, where Λ is the element of rank 0, and a_{i+1} one of rank $i+1$. The element a_{i+1} covers the elements a_{ij}, $j=1, 2, \cdots, i+1$, of rank i, and the set $[\Lambda, a_{i+1})$ is the union of all the segments $[\Lambda, a_{i+1}]$ of type $P(i)$. Every segment $[\Lambda, a_{ij}]$ contains $C(i, k)$ chains of length k. However, as some of this chains belong to many segments of the mentioned type, one obtains for the sought number of chains in the $[\Lambda, a_{i+1})$

$$\sum_{j=1}^{i-k+2} (-1)^{j-1} \binom{i+1}{j} C(i-j+1, k).$$

It is clear that this expression represents the number of all the chains of length $k+1$ in the $P(A)$ whose the last element is a_{i+1}. Since there exist $\binom{n}{i+1}$ elements of rank $i+1$, and $k-1 \leqslant i \leqslant n-1$, one obtains the recurrent formula (1)* representing the number of all the chains of leugth $k+1$ in a ordered set of type $P(n)$.

By using (1) one prove by induction the final formula

$$C(n, k)=\sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{k-1}{s} (k+1-s)^n. \tag{2}$$

At first we have for $k=1$ $C(n, 1)=2^n$. Then, if the formula (2) is true for $k=m$, it follows from (1) and (3)

* See the formula in the original text.

$$C(n, m+1)=\sum_{i=m-1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i-m+2}\sum_{s=0}^{m+1}(-1)^{s+j-1}\binom{n}{i+1}\binom{i+1}{j}\binom{m-1}{s}(m+1-s)^{i-j+1}.$$

After transformations and applications of some formulae from the combinatory analysis, we obtain.

$$C(n, m+1)=\sum_{s=0}^{m}(-1)^{s}\binom{m}{s}(m+2-s)^{n},$$

what means that (2) is true for $k=m+1$, and for any $k \leqslant n+1$ too. It is easy to show that from (2) follows $C(n, n+1)=n!$