ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ, СКОПЈЕ
FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ОДДЕЛ
SECTION DES SCIENCES NATURELLES
ПОСЕБНИ ИЗДАНИЈА, КНИГА 2 * ÉDITIONS SPÉCIALES, LIVRE 2

MILAN POPADIĆ

Matematička indukcija

SKOPJE — СКОПЈЕ
1950

Тираж: 600 егземплари

Печатница на Филозофскиот факултет — Скопје

PREDGOVOR

Ovaj članak je namenjen studentima matematičkih nauka, a takođe i onima koji bi želeli da dobiju nešto podrobniju sliku o *matematičkoj indukciji*, koja se u novije vreme tako plodno primenjuje u svim oblastima matematike kao metoda za dokazivanje. U tu svrhu težio sam da izlaganje bude što elementarnije a relativno veliki broj primera ima za cilj da se čitalac što bolje srodi sa ovim dokaznim postupkom.

Na kraju sam, potpunosti radi, dao kratak istoriski pregled i dotakao se značaja matematičke indukcije.

Brojevi u uglastim zagradama upućuju na literaturu koja je stavljena neposredno iza članka.

Aprila 1949
Matematički institut Univerziteta
u Skoplju

MATEMATIČKA INDUKCIJA

I

1. Pri proučavanju matematičkih zakona, naročito kada je zakonitost izražena kao funkcija izvesnog celog broja, često se opšti stav može *naslutiti* i iz posmatranja pojedinačnih slučajeva. Tako, na primer, iz definicije aritmetičke progresije, prema kojoj je razlika (d) dva njena uzastopna člana (a_{n-1}, a_n) stalna, izlazi da je

(1) $$a_n = a_{n-1} + d.$$

Ako se sa a_1 označi prvi član progresije, onda se na osnovu formule (1), dajući indeksu n vrednosti 2, 3, 4. . . ., mogu odrediti drugi, treći, četvrti i ostali članovi progresije.

Doista dobija se:

(2) $$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ d_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2\,d \\ d_4 &= a_3 + d = (a_1 + 2\,d) + d = a_1 + 3\,d \\ &. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{aligned}$$

Ako se uoči da je koeficijenat, koji se javija uz d, u sva tri slučaja manji za 1 od ranga člana, može se *pretpostaviti* da je to opšti slučaj, te bi se moglo zaključiti da je, recimo, i dvanaesti član dat izrazom

(3) $$a_{12} = a_1 + 11\,d,$$

ili da uopšte za n-ti član važi formula

(4) $$a_n = a_1 + (n - 1)\,d,$$

koja sadrži kao specijalne slučajeve formule pod (2) i (3).

Sličan zaključak se može izvesti i o zbiru prvih n neparnih brojeva prirodnog niza. Kada se obrazuju zbirovi prva dva, tri odnosno četiri neparna broja toga niza, dobijaju se sledeći rezultati:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

Već se odavde može izvesti *pretpostavka* da je zbir prvih n uzastopnih neparnih brojeva jednak kvadratu njihovog broja tj. da je

$$1 + 3 + 5 \ldots\ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Naravno — to treba naročito istaći — ne može se uvek tako lako, kao u ova dva slučaja, naseutiti opšti stav.

2. Međutim ovim načinom uopštavanja, nazvanim indukcijom i vrlo mnogo upotrebljavanim u prirodnim naukama, ne mora se uvek doći do tačnih rezutata.

Tako je veliki francuski matematičar *Fermat* pretpostavljao da je svaki broj oblika $2^{2^n} + 1$ gde je n ceo pozitivan broj, prost broj. I doista stavljajući da je n jednako 1, 2, 3, 4 dobijaju se prosti brojevi 5, 17, 257 i 65 537. Međutim *Euler* je pokazao da se već za $n = 5$ dobija broj 4 294 967 297 koji je deljiv brojem 641.

Nesigurnost ovakvog načina uopštavanja može se ilustrovati i na sledećem primeru. Oba izraza

$$f(n) = \frac{1}{4}(n^4 + 15n^2 + 8) \tag{5}$$

$$\varphi(n) = \frac{1}{60}(n^4 + 85n^2 + 274)\,n, \tag{6}$$

kao što je lako proveriti, imaju iste vrednosti za $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$f(1) = \varphi(1) = 6$$
$$f(2) = \varphi(2) = 21$$
$$f(3) = \varphi(3) = 56$$
$$f(4) = \varphi(4) = 126$$
$$f(5) = \varphi(5) = 252.$$

Međutim za $n = 6$ dobija se

$$f(6) = 461, \qquad \varphi(6) = 463.$$

Prema tome ispitivanjem samo prvih pet članova niza

(7) $\qquad 6, 21, 56, 126, 252 \ldots\ldots$

ne bi se moglo sa sigurnošću utvrditi da li je opšti član niza (7) dat formulom (5) ili formulom (6) ili eventualno nekim trećim izrazom.

Mogu se obrazovati još opštije funkcije istog svojstva. — Tako na primer funkcija

$$f(n) = \varphi(n) + c \prod_{\nu=1}^{s} (n - \nu)^{k_\nu}$$

gde je c potpuno proizvoljna konstanta različita od nule, a k_ν pozitivne konstante, ima za $n = 1, 2, 3, \ldots s$ iste vrednosti kao i funkcija $\varphi(n)$, dok je za $n > s$ uvek $f(n) \neq \varphi(n)$.

Dakle za uopštavanje nekog stava nije dovoljna samo verifikacija izvesnog konačnog broja pojedinačnih slučajeva, ma koliki taj broj bio.

3. Analizom jednog konkretnog primera dolazi se do načina na koji se može, u ovakom slučaju, dokazati opšti stav.

Kao što se vidi naročito jasno iz prvog primera sa aritmetičkom progresijom, dokaz svakog pojedinačnog stava izvodi se na osnovu pretpostavke da je prethodni stav tačan. Tako stav izražen trećom formulom pod (2) izvodi se na osnovu definicije artimetičke progresije i prethodnog stava izraženog drugom formulom pod (2); ovaj pak stav proizlazi iz iste dećinicije i prethodnog — prvog stava. Prvi stav je međutim neposredna posledica definicije aritmetičke progresije.

Na sličan način bi se mogao dokazati ma koji stav dobijen iz formule (4) stavljajući za n jedan određen ceo pozitivan broj.

Iz ovog sleduje da bi se opšti stav (4) mogao dokazati ako se uspe da se pokaže:

I Da postoji bar jedna vrednost od n za koju je istinitost stava verificirana bilo na koji način.

II Da tačnost stava ma za koju vrednost od n proizlazi iz tačnosti stava za $n - 1$.

I zaista može se lako pokazati da je svaki stav koji izražava izvesno svojstvo prirodnih brojeva, i koji ispunjava oba navedena uslova — istinit i za sve prirodne brojeve, počevši od one vrednosti za koju je verificiran prema uslovu I.

Doista neka je vrednost za koju je stav verificiran $n = n_1$. Time je uslov I ispunjen. Neka je ispunjen i uslov II, ali neka se pretpostavi da postoji ipak bar jedna vrednost od $n \geqq n_1$ za koju stav nije tačan. Neka je od tih brojeva (ako ih ima više) za koje stav nije tačan najmanji broj m. Prema tome za prethodni broj $m-1$ stav je istinit, jer da nije tako onda ne bi broj m bio najmanji broj te vrste. Ali prema uslovu II, pošto je stav tačan za broj $m-1$ mora biti tačan i za m što protivureči pretpostavci. Znači — svaki stav, za koji se može pokazati da ispunjava oba uslova, istinit je i za sve prirodne brojevi veće od n_1.

Dakle potpun dokaz stava (4) izgledao bi ovako.

Stav izražen formulom:

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

istinit je za $n=1$, jer se u tom slučaju prethodna relacija svodi na identitet:

$$a_1 = a_1.$$

Uslov I je dakle ispunjen.

Neka se sada pretpostavi da je taj stav tačan i za jednu specijalnu vrednost $n=m$. Tada se ima

$$a_m = a_1 + (m-1)\,d. \tag{8}$$

Iz same definicije (1) dobija se da je

$$a_{m+1} = a_m + d,$$

odakle proilazi na osnovu (8)

$$a_{m+1} = a_m + md,$$

što pokazuje da je stav (4) istinit i za slučaj kad je $n=m+1$. Uslov II je dakle takođe ispunjen te je na taj način dati stav dokazan.

4. Kao što se vidi iz prethodnog izlaganja za dokaz stava koji je izražen nekom relacijom sa n, gde je n ceo pozitivan broj, dovoljno je da ta relacija jednovremeno ispunjava oba uslova t. j. uslove I i II.

Da je nužno da bude ispunjen uslov II izlazi već iz ranije konstatovane činjenice da se, iako je utvrđena tačnost nekog stava za izvestan konačan broj pojedinačnih slučajeva, ipak može desiti da stav nije istinit u opštem slučaju. — Slično se na jednom konkretnom primeru može pokazati nužnost uslova pod I.

Doista neka se pretpostavi da je relacija

$$1+2+2^2+\ldots\ldots\ldots+2^n=2^{n+1} \tag{9}$$

tačna za $n=m$ t. j. da se ima

$$1+2+2^2+\ldots\ldots\ldots+2^m=2^{m+1}$$

Dodajući levoj i desnoj strani poslednje jednakosti 2^{m+1} dobija se

$$1+2+2^2+\ldots\ldots+2^m+2^{m+1}=2\cdot 2^{m+1}=2^{m+2},$$

što pokazuje da je relacija (9), pod pretpostavkom da je tačna za $n=m$, istinita i za $n=m+1$. Međutim ova relacija nije zadovoljena ni za jednu pozitivnu celu vrednost od n, a može se lako dokazati, opet na sličan način, da je uvek

$$1+2+2^2+\ldots\ldots\ldots+2^n<2^{n+1}.$$

5. Ovaj način dokazivanja, koji se naziva najčešće *potpunom* ili *matematičkom indukcijom*,* *Poincare* [1] je formulisao na sledeći način:

I Ako je neko svojstvo istinito za broj 1, i ako se pokaže da je istinito za $n+1$ samo ako je istinito za n, ono će biti istinito i za sve cele brojeve.

Ovde treba sledeću primedbu učiniti.

Svojstvo ne mora da je tačno za broj 1, što je uostalom jasno već iz ranijeg izlaganja. Njegova tačnost može da započne od nekog većeg broja. Tako na primer relacija

$$2^n<n! \tag{10}$$

gde je n ceo pozitivan broj, tačna je samo za $n\geqq 4$, što se može lako dokazati matematičkom indukcijom. U tom slučaju bi se ovoj princip izrekao na sledeći način:

II Ako je jedno svojstvo istinito za izvestan ceo pozitivan broj n_1, i ako se pokaže da je istinito za $n+1$ samo ako je istinito za n, ono će biti istinito i za sve cele brojeve veće od n_1.

---

* U francuskoj literaturi nalazi se i izraz „raisonnement par recurrence", a u nemačkoj Beweis durch Abschreiten. — Takođe postoji i naziv „prelaz od n na $n+1$".

Međutim razlika između ove dve formulacije principa matematičke indukcije čisto je formalnog karaktera. Doista svaka relacija sa n, koja je istinita za svako $n \geqslant n_1 > 1$, može se transformacijom $n = m + n_1 - 1$ svesti na relaciju sa m koja je istinita za sve cele pozitivne brojeve. Tako relacija (1) posle transformacije $n = m + 3$, prelazi u relaciju

$$2^{m+3} < (m+3)!$$

koja važi za sve cele pozitivne brojeve. Takođe podesnom transformacijom se može udesiti da je relacija tačna za sve cele pozitivne brojeve i za nulu.

Najzad ako se sa $R(x) = 0$ označi neka relacija sa x, ovaj se princip može formulisati i na sledeći način:

III Ako postoji relacija $R(1) = 0$, i ako se iz relacije $R(m) = 0$ može izvesti relacija $R(m+1) = 0$ onda važi i relacija $R(n) = 0$ gde n pretstavlja ma koji ceo pozitivan broj [2].

Mesto znaka jednakosti u prethodnoj relaciji može stajati i znak $>$ ili $<$ (takođe i $\geqslant$, $\leqslant$).

Na kraju može se sledeća primedba učiniti.

Pošto se često dokaz da izvesno svojstvo važi za prirodan broj n, izvodi iz pretpostavke da ono pripada svim prirodnim brojevima manjim od n, ovaj se princip formuliše i na sledeći način:

IV Ako je neko svojstvo istinito za broj 1, i ako se pokaže da je istinito i za n samo ako je istinito za sve prirodne brojeve manje od n, ono će biti istinito i za sve prirodne brojeve [3].

Ovde je, kao što se vidi izvršena izvršna modifikacija uslova II. Međutim jasno je da se ova i prethodne formulacije mogu svesti jedna na drugu. I doista pretpostavka da je svojstvo, o kome je reč, istinito za sve brojeve manje od n sadrži i pretpostavku da je ono istinito i za broj $n - 1$, dakle pretpostavku koja je učinjena u prethodnim formulacijama. — Obrnuto, iz prethodnih formulacija jasno izlazi da tačnost nekog stava za proizvoljan prirodan broj zahteva njegovu tačnost za sve prethodne brojeve.

II

6. Kada je neki stav, koji ispunjava uslov II, istinit za izvestan ceo broj n_1, onda je, kao što je već pokazano, tačan i

za sve cele brojeve veće od n_1. Međutim ako se može pokazati da je pomenuti stav istinit i za $n-1$, kada je istinit za n, onda se može i vesti zaključak da je istinti i za sve cele brojeve manje od n_1, pa dakle i za sve cele brojeve uopšte. U ovom slučaju *proširen princip indukcije* mogao bi se ovako izraziti:

V Jedan stav, koji važi za neki specijalan broj, i čije važenje za ceo broj k jednovremeno povlači njegovo važenje i za $k+1$ *i* $k-1$, važi za sve cele brojeve [4].

Primena ovog proširenog principa naročito je pogodna ako svojstvo, izraženo datim stavom, pripada ne samo celim pozitivnim nego i negativnim brojevima i nuli. U tom slučaju u poslednjoj formulaciji israz *za sve cele brojeve* odnosio bi se na pomenutu brojnu oblast.

Kao primer može se dokazati da relacija

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{1}$$

važi za sve cele brojeve (pozitivne, negativne i nulu)*. Pretpostavlja se da je $ab \neq 0$.

Pre svega za $n=0$ relacija (1) je identično zadovoljena jer se u tom slučaju dobija

$$1 = 1 \cdot 1.$$

Neka se sada pretpostavi da je tačna i za jednu specijalnu vrednost $n=m$, t. j. da se ima

$$(ab)^m = a^m b^m. \tag{2}$$

Množeći obe strane ove jednakosti sa ab, dobija se

$$(ab)^{m+1} = a^{m+1} b^{m+1}$$

Ovim je dokazano da relacija (1), pod prefpostavkom da važi za m, važi i za $m+1$, iz čega izlazi da važi i za sve cele brojeve veće od 0 — dakle za sve cele pozitivne brojeve.

Deleći sada obe strane jednakosit (2) sa ab dobija se

$$(ab)^{m-1} = a^{m-1} b^{m-1}$$

* Naravno pretpostavlja se da su osnovne računske adnje s negativuim brojevima i nulom definisane.

čime je dokazano da je relacija (1) tačna i za sve cele brojeve manje od 0 tj. za sve cele negativne brojeve. — Dakle stav, izražen formulom (1), važi za sve cele brojeve.

Šema ovog dokaza je sledeća: 1) konstantuje se da postoji relacija $R(n_1)=0$; 2) pokaže se da relacija $R(n)=0$ važi za sve cele brojeve veće od n_1; i najzad: 3) da je tačna i za sve cele brojeve manje od n_1.

Međutim dokaz da je stav $R(n)=0$ tačan za sve brojeve manje od n_1, svodi se na dokaz da je relacija $R(-n)=0$ istinita za sve cele brojeve veće od n_1 (dakle manje od n_1). Prema tome i primenom ranijih formulacija principa matematičke indukcije može se uvek, kada je to slučaj, dokazati da je dati stav tačan za sve cele brojeve — pozitivne, negativne i nulu.

7. Stavovi koji se dokazuju matematičkom indukcijom iskazuju svojstva niza celih brojeva. Međutim ako se ovaj niz zameni proizvoljnim nizom brojeva, recimo nizom

$$a_1, a_2, \ldots \ldots \ldots a_n, \ldots \ldots \tag{3}$$

tada se ovaj princip može formulisati na sledeći još opštiji način:

VI Ako je neko svojstvo istinito za prvi član izvesnog niza, i ako se utvrdi da je, pod pretpostavkom njegove istinitosti ma za koji član toga niza, istinito i za sledeći član — onda je istinito i za sve članove toga niza.

U slučaju kada je niz, o kome je reč, niz prirodnih brojeva, tada se ova formulacija, poklapa s formulacijom I.

Međutim i ovo je proširenje samo formalnog karaktera. Doista neka je relacija, koja izražava svojstvo članova niza (3)

$$R(a_n)=0, \tag{4}$$

gde a_n pretstavlja ma koji član niza. Kako je svaki član niza funkcija svoga ranga, to se može staviti da je $a_n=\varphi(n)$, pa se posle smene u (4) dobija

$$R(a_n)=R[\varphi(n)]=R_1(n)=0$$

Odavde izlazi da su relacije

$$R(a_n)=0 \qquad R_1(n)=0$$

ekvivalentne pa prema tome su i formulacije I i VI takođe ekvivalentne.

Najzad ako se definiše pojam klase kao množina brojeva koji imaju izvesno određeno svojstvo, može se navesti sledeća formulacija:

VII Ako prvi član jednog niza pripada izvesnoj klasi, i ako pripadanje klasi ma koga njegovog člana povlači pripadanje i sledećeg člana — onda ceo niz pripada toj klasi [5].

S obzirom na ono što je dosada rečeno, iako na izgled znatno opštija defincija, jasno je da je i ona ekvivalentna prethodnim.

Treba napomenuti još da se uopštenje ovog principa može izvršiti i na sledeći način.

Dosada se pretpostavljalo da je stav, koji treba dokazati, bio izražavan relacijom sa jednim argumentom. Međutim mogu se na sličan način dokazivati i relacije oblika

$$R(m, n) = 0 \tag{5}$$

gde su m i n proizvoljni celi brojevi.

Šema dokaza da je izraz (5) tačan sledeća je.

Neka je za $m = m_1$ i $n = n_1$ pomenuta relacija zadovoljena tj. neka je

$$R(m_1, n_1) = 0.$$

Ako sada

$$R(p, n_1) = 0$$

povlači

$$R(p+1, n_1) = 0,$$

onda je tačna i relacija

$$R(m, n_1) = 0.$$

za svaki prirodan broj $m \geqslant m_1$.

Na isti način ako

$$R(m, q) = 0$$

povlači

$$R(m, q+1) = 0$$

onda je

$$R(m, n) = 0$$

za svako $n \geqslant n_1$. Time je dokazana tačnost relacije (5). Kao što se vidi dokaz se sastoji iz dvostruke primene principa matematičke indukcije.

Na sličan se način može primeniti ova metoda i u slučaju relacija sa više argumenata.

8. Najzad jedna specijalna vrsta induktivnog dokaza, koja bi se mogla nazvati *povratnom* ili *regresivnom indukcijom**, formuliše se na sledeći način [6]:

A. Istinitost izvesne relacije

$$R(n) = 0$$

sleduje iz dve pretpostavke:

I' $R(n) = 0$ je istinito za beskonačno mnogo prirodnih brojeva;

II' Istinitost relacije $R(n) = 0$ povlači takođe tačnost relacije $R(n-1) = 0$.

Doista neka se pretpostavi da data relacija nije istinita za $n = m$. Prema prvoj pretpostavci sigurno postoji jedan prirodan broj $N > m$ za koji je relacija tačna. Međutim na osnovu druge pretpostavke relacija $R(n) = 0$ mora biti tačna za sve prirodne brojeve $n \leqslant N$, što se dokazuje na sličan način kao u tački *3*. Dakle relacija je tačna i za $n = m$. Iz ove protivrečnosti sleduje tačnost stava A.

Da bi se izvestan stav dokazao, kao što sleduje iz uslova I', potrebno je znati da je tačan za izvesnu beskonačnost prirodnih brojeva. Međutim u konkretnom slučaju i ova činjenica se katkada dokazuje matematičkom indukcijom.

Kao primer za primenu ove metode može se navesti *Cauchy-ev stav:*

Geometriska sredina izvesnog broja pozitivnih brojeva nikada nije veća od njihove aritmetičke sredine**,

ili simbonički označeno

$$G_n \leqslant A_n,$$

gde je

$$G_n = (a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}, \qquad A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Pre svega može se pomoću matematičke indukcije dokazati da je stav tačan za sve brojeve oblika $n = 2^m$, gde je m proizvoljan prirodan broj.

---

* Prema izrazu backward induction — koji se nalazi u matematičkoj literaturi na engleskom jeziku.

** U kujizi: С. И. Новоселов, Алгебра, 1946, ст. 262—263, Учпедгиз Москва-Ленинград — ovaj je stav dokazan običnom matematičkom indikcijom.

Doista za $m=1$, odnosno $n=2$, dobija se

$$G_2^2 = a_1 a_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 = A_2^2$$

dakle

(6) $$G_2 \leqslant A_2.$$

Sada treba dokazati da je stav takođe tačan i za $n=2^{k+1}$ čim je tačan za $n=2^k$, ili ako je tačan a $n=2^k=s$, da je tačan i za $n=2s$.

Neka je

$$G_{2s} = (a_1 \ldots\ldots a_s\, a_{s+1} \ldots\ldots\ldots a_{2s})^{\frac{1}{2s}}$$

$$A_{2s} = \frac{a_1 + \ldots\ldots + a_s + a_{s+1} + \ldots\ldots + a_{2s}}{2s}$$

gde su simboli a_k pozitivni brojevi. Podelimo ovih $2s$ elemenata na dve grupe od kojih prva sadrži $a_1, \ldots\ldots a_s$ a druga $a_{s+1} \ldots\ldots a_{2s}$, i obrazujmo sledeće izraze:

$$G_s = (a_1 a_2 \ldots\ldots a_s)^{\frac{1}{s}} \qquad G'_s = (a_{s+1}\, a_{s+2} \ldots\ldots a_{2s})^{\frac{1}{s}}$$

$$A_s = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_s}{s}, \qquad A'_s = \frac{a_{s+1} + a_{s+2} + \ldots\ldots + a_{2s}}{s}.$$

Kako G_s i G'_s pretstavljaju geometriske sredine a A_s i A'_s odgovarajuće aritmetičke sredine od po s elemenata, to iz učinjene pretpostavke izlazi da između tih veličina postoje sledeće relacije

$$G_s \leqslant A_s \qquad G'_s \leqslant A'_s$$

Dalje na osnovu (6) i poslednjih relacija dobija se

$$\left(G_s\, G'_s\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{G_s + G'_s}{2} \leqslant \frac{A_s + A'_s}{2},$$

a kako je

$$\left(G_s\, G'_s\right)^{\frac{1}{2}} = G_{2s}, \qquad \frac{A_s + A'_s}{2} = A_{2s},$$

najzad izlazi

$$G_{2s} \leqslant A_{2s}$$

što je trebalo dokazati. Ovim je dokazana i tačnost *Cauchy-evog stava* za sve prirodne brojeve oblika $n = 2^m$ a na taj način i to da je uslov I' ispunjen.

Dokažimo da je i uslov II' ispunjen tj. da iz pretpostavke

$$G_k \leqq A_k \tag{7}$$

sleduje

$$G_{k-1} \leqq A_{k-1}$$

Neka je

$$G_{k-1} = (a_1 a_2 \ldots\ldots a_{k-1})^{\frac{1}{k-1}}, \quad A_{k-1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{k-1}}{k-1}$$

i obrazujmo geometrisku i aritmetičku sredinu od k elemenaat $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{k-1}\ G_{k-1}$

$$G_k = \left(a_1 a_2 \ldots\ldots a_{k-1}\, G_{k-1}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(G_{k-1}^{k-1}\, G_{k-1}\right)^{\frac{1}{k}} = G_{k-1}$$

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{k-1} + G_{k-1}}{k} = \frac{(k-1)\, A_{k-1} + G_{k-1}}{k}$$

Na osnovu relacije (7), sleduje

$$G_{k-1} \leqq \frac{(k-1)\ A_{k-1} + G_{k-1}}{k}$$

odakle izlazi

$$G_{k-1} \leqq A_{k-1},$$

što je trebalo i dokazati. Pošto je sada utvrđeno da je uslov II' takođe ispunjen, jasno je da *Cauchy-ev stav* doista važi za proizvoljan broj pozitivnih brojeva.

Ovakvi slučajevi, kada se i prva postavka, tj. pretpostavka da je tvrđenje tačno za izvestan beskrajni niz (s) prirodnih brojeva, dokazuje matematičkom indnkcijom, pretstavlja u stvari slučaj, kada treba dokazati tačnost relacije sá dva argnmenta, slučaj koji je tretiran u tački 7. Doista neka se stavi

$$A_l - G_l \equiv R(l)$$

Tada treba dokazati da je relacija

$$R(l) \geqq 0 \tag{8}$$

tačna za sve prirodne brojeve l. Ako se stavi

$$l = f(m) - n,$$

gde je $f(m)$ opšti član niza (s), dobija se

$$R[f(m)-n] \geqslant 0. \tag{9}$$

Da bi se dokazala relacija (8) dovoljno je pokazati da i relacija (9) važi kad god su m i n prirodni brojevi [dovoljno je pokazati da važi samo za brojeve koji ispunjavaju uslov $f(m)-n \geqslant 1$]. Međutim kako izraz (9) sadrži dva argumenta to se ovaj dokaz izvodi kao i dokaz relacije (5) u tački 7. U ovom slučaju je $m_1=1$, $n_1=0$ a $f(m)=2^m$.

Potpunosti radi može se još napomenuti da postoje i druge znatno opštije formulacije principa indukcije, samo njihovo izlaganje izašlo bi iz okvira ovog članka.

III

9. Princip matematičke indukcije primenjuje se u svim oblastima matematike. Vrlo često se izvesni stavovi na ovaj način prostije i elementarnije dokazuju no drugim putem. Međutim naročiti značaj dobija matematička indukcija u *Aritmetici* čiji se osnovni stavovi izvode jedino na osnovu tog principa iz definicija.

Kao primer može se navesti dokaz *zakona asocijacije*, koji se simbolički izražava formulom:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

gde su a, b i c prirodni brojevi.

Prethodno treba pretpostaviti da je određen smisao izraza $m+1$, kao i da je zbir $m+n$ definisan rekurentnom formulom

$$m+n=[m+(n-1)]+1. \tag{1}$$

Dokaz glasi:

Stav

$$a+(b+c)=(a+b)+c \tag{2}$$

je tačan za $c=1$ jer se u tom slučaju svodi na jednakost

$$a+(b+1)=(a+b)+1,$$

koja je neposredna posledica definicije (1).

Neka se pretpostavi sada da je stav (2) tačan i za $c=\gamma$, tj. da se ima

$$a+(b+\gamma)=(a+b)+\gamma. \tag{3}$$

Pošto je prema definiciji (1)

$$b+(\gamma+1)=(b+\gamma)+1$$

to je

$$a+[b+(\gamma+1)]=a+[(b+\gamma)+1].$$

Dalje opet na osnovu (1), dobija se

$$a+[(b+\gamma)+1]=[a+(b+\gamma)]+1.$$

Iz (3) sleduje

$$[a+(b+\gamma)]+1=[(a+b)+\gamma]+1.$$

Najzad ponovo na osnovu definicije (1) —

$$[(a+b)+\gamma]+1=(a+b)+(\gamma+1).$$

Iz poslednje četiri jednakosti dobija se

$$a+[b+(\gamma+1)]=(a+b)+(\gamma+1),$$

čime je dokazano da stav (2) važi i za $c=\gamma+1$, pa prema tome za svaku vrednost od c.

Na ovakav način se dokazuju i ostali osnovni stavovi Aritmetike.

10. U *Teoriji brojeva* postoji sledeća teorema (*Fermat*):

Ako je p prost broj, a n proizvoljan pozitivan ceo broj, onda je izraz

$$f(n)=n^p-n$$

uvek deljiv brojem p.

Ona je nesumnjivo tačna za $n=1$, jer je gornji izraz tada jednak nuli.

Neka se sada pretpostavi da je tačna i za slučaj kada je $n=m$, tj. da je izraz $f(m)=m^p-m$ deljiv brojem p. Sada treba dokazati da je teorema tačna i za izraz $f(m+1)=(m+1)^p-(m+1)$.

Pošto je

$$(m+1)^p=m^p+\binom{p}{1}m^{p-1}+\ldots\ldots+\binom{p}{p-1}m+1$$

sledeuje

$$f(m+1) = f(m) + \binom{p}{1} m^{p-1} + \dots\dots\dots + \binom{p}{p-1} m.$$

$f(m)$ je deljivo sa p prema pretpostavci. Međutim lako se uviđa da su i svi koeficijenti polinoma

$$(4) \qquad \binom{p}{1} m^{p-1} + \binom{p}{2} m^{p-2} + \dots\dots + \binom{p}{p-1} m$$

deljivi brojem p.

Doista ti koeficijenti su celi brojevi oblika

$$\frac{p(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots k}$$

gde je k ceo pozitivan broj manji od p. Pošto je p prost broj a veći od k, to on nema zajedničkih činilaca sa $k!$, usled čega proizlazi da je on takođe činilac celog broja izraženog tim koeficijentom. Dakle pošto su svi koeficijenti polinoma (4) deljivi brojem p, sleduje da je i izraz $f(m+1)$ deljiv brojem p.

Iz svega što je rečeno sleduje da je izraz $n^p - n$, gde je n ma kakav ceo pozitivan broj, uvek deljiv prostim brojem p.

11. Dokazati formulu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \pi.$$

Iz redukcione formule

$$(5) \qquad \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{2n} \frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

dobija se za $n=1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{t}{1+t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

odakle se vidi da je za $n=1$ formula tačna.

Neka se sada pretpostavi da je tačna za $n = m - 1$, tj. da se ima

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2m-2)} \pi .$$

Na osnovu (5) dobija se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}} = \frac{1}{2m} \left[\frac{t}{(1+t^2)^m} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2m-1}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m},$$

a s obzirom na (6) izlazi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2m} \pi ,$$

čime je dokazano da je data formula tačna i za $n = m$, pa prema tome i za svaku celu pozitivnu vrednost od n.

12. Dokazati da je relacija

$$(7) \qquad \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

tačna za svaki prirodan broj n.

Pre svega se dobija sledeći rezultat:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(x^n e^{\frac{1}{x}} \right) = \frac{d^n}{dx^n} \frac{d}{dx} \left(x^n e^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$= n \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right) - \frac{d}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^{n-2} e^{\frac{1}{x}} \right).$$

Kada se stavi

$$A_k \equiv \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}} \right)$$

poslednja jednakost glasi:

$$(8) \qquad A_{n+1} = A_n - \frac{d}{dx} A_{n-1}$$

Ako je relacija (7) tačna za sve prirodne brojeve, onda jednakost (8) treba da se, posle smene A_{n-1}, A_n i A_{n+1} odgovarajućim izrazima, svede na indentitet. Doista tada se dobija

$$(-1)^{n+1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}} = n(-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} - (-1)^{n-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\right)$$

što se lako proverava.

Odavde sleduje da je relacija (7), ako je tačna za $n = m - 1$ i $n = m$, takođe tačna i za $n = m + 1$. Tako ako je to slučaj za $n = 1$ i $n = 2$ sleduje da je relacija istinita i za $n = 3$, pa bi se kao i u prethodnim slučajevima mogao izvesti zaključak da je tačna i za sve prirodne brojeve.

Dakle da bi se dokazala tačnost formule (7) potrebno je i dovoljno da su ispunjena sledeća dva uslova: 1) da je (7) tačno za $n = 1$; 2) da tačnost date formule za $n = m$ proizlazi iz pretpostavke da je ona tačna za sve vrednosti $n < m$ (tačka 5, formulacija IV).

Stavljajući $n = 1$ u (7) dobija se jednakost

$$\frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} = - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

čija je tačnost očevidna, što pokazuje da je uslov 1) doista zadovoljen.

Da je uslov 2) ispunjen sleduje iz onoga što je već rečeno o formuli (8).

Prema tome formula (7) je dokazana.

13. Kao primer iz *Geometrije* biće dokazana *Euler-ova teorema* o konveksnim polijedrima:

Kod svakog konveksnog polijedra zbir broja graničnih površina i broja temena veći je za dva od broja ivica.

Ako se sa F, S i A obeleže brojevi graničnih površina, temena i ivica, stav se simbolički izražava

$$F + S = A + 2$$

Kada se iz polijedra izbaci jedna granična površina, dobija se jedna otvorena polijedarska površina koja ima isti broj temena i ivica ali jednu manje graničnu površinu. Prema tome za nju bi, ako je teorema tačna, važila relacija

$$F' + S = A + 1 \tag{7}$$

gde je F' broj graničnih površina otvorene polijedarske površine.

Pre svega biće dokazan pomoćni stav da za svaku otvorenu polijedarsku površinu, koja je deo nekog konveksnog polijedra, a čije slobodne ivice obrazuju jedinstvenu zatvorenu liniju bez višestrukih tačaka, važi relacija (7).

Ta je relacija doista tačna za slučaj $F' = 1$, jer je tada broj temena jednak broju ivica što sleduje i iz formule (7).

Neka se sada pretpostavi da je stav tačan za sve otvorene polijedarske površine čiji je broj graničnih površina manji od broja F'_1 (tačka 5, formulacija IV).

Neka se najzad na jednoj otvorenoj polijedarskoj površini, čiji je broj graničnih strana F'_0, spoje dva temena njene granične linije izlomnjenom linijom sastavljenom od ivica te površine. Tada se dobijaju dve nove polijedarske površine iste vrste, pod pretpostavkom da deona linija nema višestrukih tačaka i da osim krajnjih, nema više zajedničkih tačaka sa graničnom linijom prvobitne polijedarske površine. Ako se sa F'_1, F'_2, S_1, S_2 i A_1, A_2 obeleže brojevi graničnih polijedarskih površina, odnosno temena i ivica tih novih polijedarskih površina, onda se, s obzirom da je

$$F'_1 < F'_0, \qquad F'_2 < F'_0$$

dobijaju relacije

$$F'_1 + S_1 = A_1 + 1, \qquad F'_2 + S_2 = A_2 + 1.$$

Sabirajući odgovarajuće strane poslednjih dveju jednakosti izlazi

$$F'_1 + F'_2 + S_1 + S_2 = A_1 + A_2 + 2. \tag{8}$$

Ako je broj ivica koje čine deonu liniju k, onda je broj temena na njoj $k + 1$. Jasno je da je u zbirovima $S_1 + S_2$ i $A_1 + A_2$ broj temena, odnosno broj ivica deone linije dvaput uračunat, zbog čega je

$$S_1 + S_2 = S + k + 1, \qquad A_1 + A_2 = A + k$$

gde su S i A brojevi temena i ivica provobitne polijedarske površine. Kako je pored toga

$$F'_1 + F'_2 = F'_0,$$

to sleduje iz (8')

$$F'_0 + S = A + 1.$$

Dakle pomoćni stav je tačan i za slučaj kad je broj graničnih površina F'_0, iz čega proizilazi njegova tačnost i za proizvoljno veliki broj graničnih površina.

Pošto je ovaj dokazani stav tačan i za polijedarsku površinu dobijenu odbacivanjem jedne jedine granične površine konveksnog polijedra, jasno je da je *Euler-ova teorema* dokazana [7].

IV

14. Metoda matematičke indukcije je relaitvno dockan otkrivena, ma da se po nekim piscima tragovi ovoga načina dokazivanja nalaze već kod *Zenona*, *Platona* i *Euklida* [8]. Kao pronalazača većina autora u svojim istoriskim delima naznačuju *Frančeska Maurolika** (*Francesco Maurolico*, 1944 - 1575) iz Mesine. On je bio sveštenik i između ostalog bavio se i matematikom. Prevodio je grčke klasike i među njima i Arhimeda zbog čega su ga savremenici nazivali drugim Arhimedom. — 1575 god. izišla je u Veneciji njegova *Aritmetika* — *Arithmeticorum libri duo* — u kojoj je prvi put upotrebljen dokaz pomoću matematičke indukcije u vezi sa poligonalnim brojevima.

Međutim *M. Cantor*, u svome opsežnom delu *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, navodi kao pronalazača *Paskala* (*Blaise Pascal*, 1623 - 1662), koji je ovaj način dokaza upotrebio u svome delu *Traité du triangle arithmétique*, izašlom 1654 godine. — Takođe je *Jakob Bernoulli* (1654 — 1705) nezavisno od *Paskala* upotrebio istu metodu u svome delu *Ars coniectandi* (1713 g), tako da je čak jedno vreme nazivana i *Bernulijevom indukcijom.*

Radi ilustracije kako je matematička indukcija upotrebljena od svojojih pronalazača, navešćemo jedan Paskalov dokaz. — Njemu je neki njegov prijatelj, koji se mnogo kockao, postavio sledeće pitanje: *ako dva igrača, posle izvesnog broja odigranih partija, budu prinuđeni da prekinu igru ne završivši je, kako treba podeliti ulog?* — *Paskal* to rešava na sledeći način. Ulog treba podeliti u odnosu koji obrazuju brojevi mogućnosti dobitaka oba igrača, ili, što je isto, u odnosu odgovarajućih verovatnoća.

---

* A. Ostrovski (Vorlesungen über Diferential- und Integralrechnung, Erster Band, 1945, S. 9—10. Bürkhäuser, Basel, navodi Levi Ben Gerson — a kao prvog koji je jasno formulisao ovaj p incip još 1321 godine.

Da bi našao taj odnos on se služi *aritmetičkim trouglom*:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

u kome horizontalne redove naziva bazom.

Pre svega treba znati koliko svakom od igrača nedostaje dobitaka da bi dobio i igru. Ako recimo igraču A nedostaju 2 dobitka, igraču B 4, onda se u šestoj $(6=2+4)$ bazi koja ima šest elemenata

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

obrazuje zbir od prva dva elementa $1+5=6$, što pretstavlja broj mogućnosti dobitaka igrača B; zbir sledeća četiri elementa $10+10+5+1=26$ pretstavlja broj mogućnosti dobitaka igrača A.— Odnos

$$26:6 \left(\text{ili} \ \frac{26}{32}:\frac{6}{32} \right)$$

pretstavlja razmeru po kojoj treba podeliti ulog između igrača A i B.

Dokaz ovog tvrđenja je sledeći. Za slučaj kada je ukupan broj igara koje nedostaju igračima 2, onda se mogu desiti dva slučaja. Prvo: igraču A nedostaju 2 dobitka, igraču B nedostaje nula dobitaka. Jasno je da je verovatnoća da dobije igrač B $\frac{1+1}{2}=1$, a za igrača A $\frac{0}{2}=0$, odakle sleduje da ceo ulog pripada igraču B. Drugo: igračima nedostaje još po jedan dobitak. Tada se ulog deli u odnosu 1:1. Dakle očevidno je da je tvrđenje tačno za drugu bazu.

Ako se sada pretpostavi da je tvrđenje tačno za četvrtu bazu, može se dokazati njegova tačnost i za petu bazu. Doista ako igraču A nedostaju 2 igre, igraču B 3, onda posle odigrane jedne igre, može se desiti da igraču A nedostaje 1 a igraču B opet 3, ili igraču A 2 igre a isto toliko i igraču B, s obzirom na to ko je dobio odigranu igru. Kako je po pretpostavci tvrđenje tačno za četvrtu bazu to je u prvom slučaju broj mogućnosti dobitaka za A $1+3+3=7$, a za B 1. U drugom slučaju za A je taj broj $3+1=4$, a za B $1+3=4$. Dakle broj svih mogućnosti za igrača A je $7+4=11$, a za igrača B $1+4=5$. Međutim ovaj rezultat pokazuje da je tvrđenje tačno i za petu bazu. Iz ovoga dakle sleduje da je tvrđenje tačno i za svaku bazu [9].

Dokaz da je stav tačan i za petu bazu pod pretpostavkom da je tačan i za četvrtu, pretstavlja u stvari prelaz sa n na $n+1$. Ma da je on učinjen na posebnom slučaju, potpuno se jasno vidi da je ideja matematičke indukcije sasvim jasno izražena.

15. Metoda matematičke indukcije dobila je svoj puni zamah i značaj tek u novije vreme kada je započela njena primena u svim oblastima matematike, tako da je postala jedna od najplodnijih metoda. — „*Neka se samo uporedi* — kaže *A. Voss* [10] — *s kakvom je virtuoznošću upotrebljavaju C. Jordan u raspravi o supstitucijama, R. Gordan u svojim ispitivanjima u teoriji invarijanata i H. Weber u predavanjima iz Algebre.*"

Značaj matematičke indukcije naročito je istakao *H. Poincaré* u svojim filosofskim delima. „*Na svakom koraku, ako se dobro zagleda, nailazi se na ovaj način rasuđivanja* (tj. rasuđivanja pomoću matematičke indukcije) *bilo u prostom obliku...... bilo u više ili manje izmenjenom obliku. — To je dakle prvenstveno matematički način rasuđivanja*" [11].

Kao što je rečeno, matematička indukcija se primenjuje počevši od Aritmetike i Algebre, svuda gde matematički stavovi izražavaju u krajnjoj liniji svojstva celih brojeva. Njena primena je isto tako plodna i u Geometriji sa dve i tri dimenzije kao i u Geometriji sa više dimenzija. U ovoj poslednjoj indukcijom se pokazuje da izvesni stavovi koji važe za geometriske oblike u dvodimenzijalnom i trodimenzijalnom prostoru — važe i za odgovarajuće oblike prostora sa više dimenzija. — Najzad u Teoriji množina primenjuju se izvesna stvarna uopštavanja principa indukcije *.

S jedne strane zbog svoje specifičnosti, s druge strane zbog svoga značaja, princip matematične indukcije postao je predmet logičkih ispitivanja tako da je stvoren logički problem matematičke indukcije. U diskusiji oko toga učestvovali su i veliki matematičari *Poinkare* i *Hilbert*, kao i mnogi logičari.

---

* Transfinitna indukcija i opšti princip indukcije. — Opšti princip indukcije formulisao je Đ. Kurepa u svom radu Ensembles ordonnés et ramifiés (Publications mathématiques de l' Université de Belgrad, T. IV, 1935, p. 1-138).

LITERATURA

[1] H. Poincaré, Science et Méthode, 1924, s. 159. Flamarion, Paris.

[2] F. Enriques, I numeri reali u knjizi Questioni riguardanti le matematiche elementari racolte e coordinate da F. Enriques, parte I, vol. 1, 1928, s. 231. Zanicheli, Bologna.

[3] Đ. Kurepa, Princip totalne indukcije u matematici u knjizi Matematička čitanka u redakciji M. Sevdića, 1947, s. 306. Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb.

[4] H. Beck, Einführung in die Axiomatik der Algebra, 1926, s 184. Walter de Gruyter und Co. Berlin und Leipzig.

[5] B. Russel, The Principle of Mathematics, Second edition, 1937, s. 240. George Allen & Union LTD, London

[6] Hardy—Littlewood—Polya, Inequalities, 1934, p. 20. University Press, Cambridge.

[7] J. Hadamard, Leçons de géométrie élémentaire, II, 3e edition, 1905, s. 423-425. Librairie Armand Colin, Paris.

[8] Ž. Marković, Uvod i višu analizu, I, 1946, s. 26. Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb

[9] M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II Band, Zweite Auflage, 1913, s. 754-757. Teubner, Leipzig

[10]. A. Voss, Über das Wesen der Mathematik, Zweite Auflage, 1913, s. 108 Teubner, Leipzig und Berlin.

[11]. H. Poincaré, La Science et l' Hypothèse, 1923, s. 19. Flamarion, Paris.

Knjige koje nisu citirane u tekstu:

12. V. Davac, O matematičkoj indukciji (Matematički list za srednju školu, II godina, s. 29-32. Beograd).

13. Я. С. Безикович, Метод полной матиматической индукции (Математика в школе, 1946, s. 20-25. Учпедгиз, Москва).

14. L. E. Dickson, College Algebra, Second edition, 1909, s. 99-103. John Wiley & Sons, New York—London.

15. Coolie—Graham—John—Tilley, College Algebra, First edition, 1948, s. 19-27. McGraw Book Company, New York and London.

16. G. Loria, Metodi matematici, 1935 p. 17-22. Hoepli, Milano.

17. M. Pasch, Der Ursprung des Zahlbegriffs, 1930, s. 26-27. Springer, Berlin.

18 B. Petronijević, Osnovi Logike, 1932, s. 210-215. Beograd.

19. Hilbert—Bernays, Grundlagen der Mathematik, Erster Band, 1934, s. 23-24, 265-273, 343-345, 425; Zweiter Band, 1939, s. 50-52, 384. Springer, Berlin.

20. Mangoldt—Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Erste Band, 8. Auflage, 1944. s 9-11, 108-109. S. Hirzel, Leipzig.

21. J. Hadamard, La Science mathématigue u Encyclopédie française, T. I, Troisième partie, 1937, s. 1·52-12i1·52-13. Larousse, Paris.

22. E. Pascal, Repertorium der höhere Mathematik, Erster Band, Erste Hälfte, 2. Auflage, 1910, s. 4. Teubner, Leipzig und Berlin.

23. Weber—Wellstein, Encyklopädie der Elementar-Mathematik, Erster Band, 2. Auflade, 1906, s. 12-13. Teubner Leipzig.

24. Enciclopedia delle Matematiche elementari a cura di L. Belzolari, G. Vivanti e D. Gigli, Volume 1, Parte I, 1930, s. 20, Hoepli, Milano.

25. A. A. Albert, College Algebra, 1946, s. 4-5. Mc Graw—Hill Book Company, New York—London.

26. Birkoff — Mac Lane, A. Survey of Modern Algebra, 1948, s. 11-12. The Macmillan Company, New—York.

27. M. K. Гребенча, Арифметика, 1947, с. 21-23. Учпедгиз, Москва.

28. Тулинов — Чекмарев, Теоретическая арифметика 1940, s. 12-13. Учпедгиз, Москва.

29. W. Mendelson, Einführung in dle Mathematik, 1918, s. 52-55. Teubner, Leipzig—Berlin.

30. Ф. Ф. Нагибин, Метод матиматической индукции в курсе средней школы (Математике в школе, 1949, N. 4).

31. G. Polya, How to solve it, 1948, s. 103-110. Princeton University Press, Princeton N. J.

32. C. V. Durell, Advanced Algebra, I, 1947, s. 42-44. G. Bell and Sons, L T D, London

Вывод

ПОЛНА ИНДУКЦИЯ

Статя инструктивного характера и разсматривает вопрось доказательного метода т. наз. полной индукции.

Дана перечень различных формуляций полной индукции, так же как и много примеров различных отраслей, главным образом элементарной математики.

В конце статьи вместе с историческим очерком, подчеркнуто и значение этого метода.

Résumé

INDUCTION COMPLÈTE

Cet article est de la nature instructive et informative et s' occupe de la méthode de démonstration nommé — l' induction complète.

C' est un abrégé de différentes définitions du principe de l' induction complète, avec plusieurs exemples de mathématiques élémentaires principalement.

A la fin, après une aperçu historigue, on a indiqué l' imprortance de cette méthode.

ERRATA

Strana	10	red	odozdo	12	stoji	izvršna	treba	izvesna
„	20	„	„	1	„	$e^{\overline{x}}$	„	$e^{\frac{1}{x}}$
„	21	„	odozgo	2	„	A_n	„	$n A_n$
„	21	„	odozdo	17	„	$n=1$	„	$n=1,2$
„	21	„	„	12	između reči očevidna i što umetnuti: a slično i za $n = 2$ (7) je identično zadovoljeno,			
Strana	22	red	odozgo	15	stoji	F_1'	treba	F_o'
„	23	„	„	15	„	izmđu	„	između
„	29	„	„	2	„	Полна	„	Полная