

MILAN S. POPADIĆ

GENERALIZACIJA JEDNOG KARAMATINOG PROBLEMA O JEDNOJ VRSTI NIZOVA

U Vesniku Društva matematičara i fizičara NR Srbije [I, 3—4 (1949), str. 155—156] profesor J. Karamata postavio je zadatak (br. 12) koji sadrži sve tačke teoreme dokazane u ovom članku, samo za specijalan slučaj $k=2$. Prema tome, ovaj članak predstavlja jedno uopštenje problema postavljenog u pomenutom časopisu.

1. *Definicija niza (k).* — Neka je k proizvoljan prirodan broj. Izvršimo u nizu prirodnih brojeva permutaciju tako, da počevši od prvog iza svakog broja stavimo k puta veći, a zatim preostali naredni broj. Na primer, ako je $k=3$, onda iza prvoga člana prirodnog niza, tj. iza 1, treba staviti $3=1 \cdot 3$, a zatim broj 2. Dalje iza 2 doći će $6=2 \cdot 3$, pa broj 4 itd., te će se dobiti niz:

1, 3, 2, 6, 4, 12, 5, 15, 7, 21, 8, 24, ...

U opštem slučaju odgovarajući niz bi izgledao:

1, k , 2, $2k$, 3, $3k$, ..., $k-1$, $(k-1)k$, $k+1$, $(k+1)k$, ...

Nizom (k) nazvaćemo niz obrazovan od članova neparnog ranga poslednjeg niza, tj. niz

(k) 1, 2, 3, ..., $k-2$, $k-1$, $k+1$, $k+2$, ...

Na primer niz (k) je za $k=3$:

1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, ...

Pre svega biće dokazana sledeća lema:

Lema 1.— *Opšti član niza (k) je oblika*

$$(1) \quad a = (kl - p) k^{2r},$$

gde je

$$l = 1, 2, 3, \dots; \quad p = 1, 2, \dots, k-1; \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Dokaz.— Prema definiciji niza (k) , od prirodnih brojeva samo brojevi oblika ka ne pripadaju njemu. Prema tome niz prirodnih brojeva može se rastaviti na dva niza čiji su opšti članovi a (članovi niza (k)) i ka . Pokazaćemo matematičkom indukcijom da je (1) opšti član niza (k) . Doista za $r=0$ (1) se svodi na

$$(2) \quad kl - p.$$

S obzirom na značenje broja p , brojevi $kl-p$ i k su relativno prosti. Odavde sleduje da (2) ne može biti oblika ka , te da mora pripadati nizu (k) .— Pretpostavimo sada da je tvrđenje tačno i za $r=s$, tj. da je

$$a = (kl - p) k^{2s}$$

član niza (k) . Tada je istii slučaj i sa izrazom

$$(kl - p) k^{2(s+1)} = k^2 a$$

Doista ako ovaj izraz ne bi bio član niza (k) , onda bi bio oblika ka' , gde je a' neki član niza (k) . Ali kako bi tada bilo $a' = ka$, sledovalo bi da a' nije član niza (k) . Iz ove protivrečnosti sleduje da je i $(kl - p) k^{2(s+1)}$ član niza (k) , pa dakle i tačnost same leme.

Iz samog izlaganja izlazi da se opšti član niza (k) može definisati izrazom

$$a = qk^{2s}, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

pri čemu je q proizvoljan prirodan broj koji zadovoljava relaciju $(q, k) = 1$.

Dokazaćemo sada sledeći stav:

Lema 2.— Brojevi l, p, r su jednoznačno određeni za svaki dati član niza (k) .

Dokaz. Neka je dat opšti član niza (k) , tj. neka je

$$a = (kl - p) k^{2r}.$$

Pretpostavimo da postoje dva sistema rešenja l_1, p_1, r_1 i l_2, p_2, r_2 .

Tada treba da je

$$(3) \quad (kl_1 - p_1)k^{2r_1} = (kl_2 - p_2)k^{2r_2}.$$

Pošto se svaki prirodan broj može rastaviti na jedan jedini način na proste faktore, i s obzirom da je $(kl_1 - p_1, k) = 1$ i $(kl_2 - p_2, k) = 1$ — sleduje

$$k^{2r_1} = k^{2r_2},$$

odakle

$$r_1 = r_2.$$

Relacija (3) se svodi tada na

$$kl_1 - p_1 = kl_2 - p_2,$$

odnosno

$$(4) \quad p_2 - p_1 = k(l_2 - l_1).$$

Ova relacija je međutim zadovoljeno samo u slučaju kada je $p_2 = p_1$ i $l_2 = l_1$. Jer ako je $|l_2 - l_1| \neq 0$, tada je uvek $k|l_2 - l_1| > k > |p_2 - p_1|$, odnosno $k|l_2 - l_1| > |p_2 - p_1|$ pošto je $k > p_1$ i $k > p_2$. Međutim ova nejednakost protivreči jednakosti (4). Dakle doista je $l_1 = l_2$ i $p_1 = p_2$ — čime je lema dokazana.

Napomenimo da se efektivno izračunavanje brojeva l, p, r , za dati član niza, može lako izvršiti.

2. Označimo sa $K(x)$ broj članova niza (k) koji nisu veći od x , a sa $[x]$, kao i obično, najveći ceo broj koji nije veći od x . Sada ćemo dokazati sledeći stav:

Teorema.— 1. Za broj članova niza (k) važe sledeće formule:

$$(5) \quad K(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}} \right],$$

$$(6) \quad K(x) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \left[\frac{x}{k^m} \right],$$

$$(7) \quad K(x) = \frac{k}{k+1} x + O(\log x), \quad x \rightarrow \infty.$$

2. Ako se sa a_n obeleži n -ti član niza (k) , tada je

$$(8) \quad a_n \sim \frac{k+1}{k} n, \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Neka je prirodan broj n napisan u brojnom sistemu od k cifara — dakle neka je

$$n = \sum_{l=0}^r k^l c_l,$$

gde svaki od simbola c_l ($l=0, 1, 2, \dots, r$) predstavlja neki od brojeva $0, 1, 2, \dots, k-1$; tada važi formula

$$(9) \quad K(n) = \frac{k}{k+1} n + \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^r (-1)^l c_l.$$

Dokaz.— Iz leme 2 neposredno sleduje da je broj članova niza (k) koji nisu veći od x , jednak broju sistema l, p, r koji zadovoljavaju relaciju

$$(10) \quad (kl - p) k^{2r} \leq x.$$

Iz ove relacije dobija se, za određene vrednosti $p=m$ i $r=n$,

$$l \leq \frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}}.$$

Prema tome l može imati jednu od sledećih vrednosti:

$$1, 2, 3, \dots, l_{nm},$$

gde je

$$l_{nm} = \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}} \right].$$

Dakle broj rešenja nejednačine (10) za $p=m$ i $r=n$ jeste l_{nm} . Stavljajući u poslednjoj formuli $n=0, 1, 2, \dots$ i $m=1, 2, \dots, k-1$ i sabirajući sve tako dobijene izraze, dobija se za broj svih rešenja nejednačine (10), pa dakle i za $K(x)$:

$$K(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}} \right].$$

Ovo je međutim formula (5), čiju je tačnost trebalo dokazati. Jasno je da je za konačno x broj sabiraka u zbiru s desne strane znaka jednakosti takođe konačan. Doišta iz nejednačine

$$(11) \quad \frac{x}{k^{2n+1}} < \frac{1}{k}$$

sleđuje

$$\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}} < \frac{m+1}{k} \leq 1,$$

a odavde, za svako n koje zadovoljava nejednačinu (11),

$$\left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}} \right] = 0.$$

Dakle prema (11) dovoljno je (a i ne i nužno) da je u ovom slučaju

$$n > \left[\frac{\log x}{2 \log k} \right].$$

Sada ćemo preći na dokaz formule (6).

Broj svih brojeva koji nisu veći od x , a deljivi su brojem a , jeste

$$(12) \quad \left[\frac{x}{a} \right].$$

Na osnovu leme 1 svaki broj niza (k) oblika je

$$(13) \quad qk^{2r}$$

gde je q proizvoljan prirodan broj za koji važi relacija $(q, k) = 1$, a $r = 0, 1, 2, \dots$. Tada brojevi oblika

$$qk^{2r+1}$$

ne pripadaju nizu (k) . Broj brojeva koji nisu veći od x a deljivi su sa k^{2r} , odnosno sa k^{2r+1} , na osnovu (12) jeste

$$\left[\frac{x}{k^{2r}} \right] \quad \text{odnosno} \quad \left[\frac{x}{k^{2r+1}} \right].$$

Kako su brojevi deljivi sa k^{2r+1} deljivi i sa k^{2r} , broj brojeva oblika (13), za određenu vrednost $r = n$, je

$$\left[\frac{x}{k^{2n}} \right] - \left[\frac{x}{k^{2n+1}} \right].$$

Stavljajući ovde $n = 0, 1, 2, \dots$ i sabirajući tako dobijene izraze, dobija se za broj svih brojeva oblika (13) koji nisu veći od x tj. za $K(x)$:

$$K(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\left[\frac{x}{k^{2n}} \right] - \left[\frac{x}{k^{2n+1}} \right] \right)$$

odnosno

$$K(x) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \left[\frac{x}{k^m} \right],$$

sto pretstavlja formulu (6). Jasno je da je i u ovom slučaju broj sabiraka u poslednjoj formuli konačan. Krajnji sabirak različit od nule je oblika

$$(-1)^s \left[\frac{x}{k^s} \right]$$

gde je

$$(14) \quad s = \left[\frac{\log x}{\log k} \right],$$

što se lako proverava.

Kako je

$$\left[\frac{x}{k^m} \right] = \frac{x}{k^m} - \delta_m, \quad 0 \leq \delta_m < 1$$

tada se iz (6) dobija

$$(15) \quad K(x) = \sum_{m=0}^s (-1)^m \frac{x}{k^m} + \sum_{m=0}^s (-1)^{m+1} \delta_m.$$

Prvi zbir pretstavlja zbir konačne geometriske progresije te je

$$\sum_{m=0}^s (-1)^m \frac{x}{k^m} = x \frac{1 - \left(-\frac{1}{k}\right)^{s+1}}{1 + \frac{1}{k}}.$$

Za drugi zbir se dobija

$$0 \leq \sum_{m=0}^s (-1)^m \delta_m \leq \sum_{m=0}^s \delta_m < s+1.$$

Zamenjujući ove izraze u (15), imamo

$$(16) \quad K(x) = \frac{k - \left(-\frac{1}{k}\right)^{s+1}}{k+1} x + \theta(s+1), \quad 0 \leq \theta < 1.$$

S obzirom na (14) dobija se

$$\theta \left(\left[\frac{\log x}{\log k} \right] + 1 \right) \sim \theta \frac{\log x}{\log k} = O(\log x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Pošto prema (14) $s \rightarrow \infty$ kada $x \rightarrow \infty$, iz (16) izlazi

$$K(x) = \frac{k}{k+1} x + O(\log x), \quad x \rightarrow \infty,$$

što predstavlja formulu (7). Na ovaj način je prva tačka teoreme dokazana u potpunosti. Napomenimo samo da iz (7) neposredno sleduje formula

$$K(x) \sim \frac{k}{k+1} x, \quad x \rightarrow \infty,$$

koja izražava da brojevi niza (k) sačinjavaju $k/(k+1)$ deo brojeva prirodnog niza, ili da ja njihova asimptotska gustina $k/(k+1)$.

Ako je a_n n -ti član niza (k) , onda je prema poslednjoj formuli

$$K(a_n) \sim \frac{k}{k+1} a_n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Međutim prema definiciji $K(x)$ sleduje $K(a_n) = n$. Iz poslednje dve relacije dobija se

$$a_n \sim \frac{k+1}{k} n, \quad n \rightarrow \infty,$$

što predstavlja formulu (8),

Najzad preći ćemo na dokaz poslednje tačke.
Stavimo $x = n$, gde je

$$(17) \quad n = c_0 + kc_1 + k^2c_2 + \dots + k^r c_r,$$

u formulu (6). Pre no što izvršimo smenu izračunajmo koliko je $\left[\frac{n}{k^m} \right]$. Dobija se

$$\frac{n}{k^m} = \frac{c_0}{k^m} + \frac{c_1}{k^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{k} + c_m + kc_{m+1} + \dots + k^{r-m} c_r.$$

Kako je

$$\frac{c_0}{k^m} + \frac{c_1}{k^{m-1}} + \dots + \frac{c_{m-1}}{k} \leq \frac{k-1}{k^m} + \frac{k-1}{k^{m-1}} + \dots + \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k^m} < 1$$

(pošto c_i može biti samo jedan od brojeva 0, 1, 2, ..., $k-1$), imamo

$$\left[\frac{n}{k^m} \right] = c_m + kc_{m+1} + \dots + k^{r-m} c_r.$$

Stavljajući $m = 0, 1, 2, \dots, r$, dobija se iz (6):

$$\begin{aligned} K(n) &= c_0 + kc_1 + k^2c_2 + \dots + k^l c_l + \dots + k^r c_r - \\ &\quad - c_1 - kc_2 - \dots - k^{l-1} c_l - \dots - k^{r-1} c_r + \\ &\quad + c_2 + \dots + k^{l-2} c_l + \dots + k^{r-2} c_r - \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + (-1)^l c_l + \dots + (-1)^l k^{r-l} c_r + \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + (-1)^r c_r. \end{aligned}$$

Kada se izvrši sabiranje sličnih sabiraka, koeficijent člana koji sadrži c_l biće

$$k^l - k^{l-1} + k^{l-2} - \dots + (-1)^l = \frac{k^{l+1} + (-1)^l}{k+1} = \frac{kk^l + (-1)^l}{k+1}.$$

Prema tome je

$$K(n) = \sum_{l=0}^r \frac{k k^l + (-1)^l}{k+1} c_l = \frac{k}{k+1} \sum_{l=0}^r k^l c_l + \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^r (-1)^l c_l.$$

Odavde, s obzirom na (17), sleduje

$$K(n) = \frac{k}{k+1} n + \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^r (-1)^l c_l,$$

što je i trebalo dokazati.

M. S. Popadić

GENERALISATION OF A PROBLEM OF J. KARAMATA
ON A KIND OF SEQUENCES

(Summary)

A generalisation is given of the problem proposed by J. Karamata in the *Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie* [1, 3-4 (1949), p. 155-156].

Definition of the sequence (k). k being a natural number, let us perform in the sequence of natural numbers the following permutation: we put after the first term, namely after 1, the k -times greater number, then the next remained term of the sequence and after this number again the k -times greater one and so on. So we obtain for $k=3$, for instance, the following sequence (k) :

$$1, 3, 2, 6, 4, 12, 5, 15, 7, 21, 8, 24, \dots$$

In general we have

$$1, k, 2k, \dots, k-1, (k-1)k, k+1, (k+1)k, \dots$$

A sequence formed with all terms of odd rank of the last sequence, i. e.

$$1, 2, 3, \dots, k-1, k+1, \dots,$$

is called the sequence (k) .

It is easy to prove the following two lemmas:

Lemma 1. The general term of the sequence (k) is

$$a = (kl - p) k^{2r}$$

where

$$l=1, 2, 3, \dots; p=1, 2, \dots, k-1; r=0, 1, 2, \dots$$

Lemma 2. The numbers l, p, r , are uniquely determined for every term of the sequence (k) .

Let $K(x)$ denotes the number of all terms of the sequence (k) not exceeding x . Then the following theorem can be proved:

Theorem. 1. For the number of terms of the sequence (k) we have:

$$(1) \quad K(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=1}^{k-1} \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n+1}} \right],$$

$$(2) \quad K(x) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \left[\frac{x}{k^m} \right],$$

$$(3) \quad K(x) = \frac{k}{k+1} x + O(\log x), \quad x \rightarrow \infty.$$

2. If we denote by a_n the n -th term of the sequence (k) , then we have

$$(4) \quad a_n \sim \frac{k+1}{k} n, \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Let n be a natural number written in the number system of k digits,

$$(5) \quad n = \sum_{l=0}^r k^l c_l,$$

where each of the letters c_l ($l=0, 1, 2, \dots, r$) represents one of the numbers $0, 1, 2, \dots, k-1$; then we have

$$(6) \quad K(n) = \frac{k}{k+1} n + \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^r (-1)^l c_l.$$

We are now going to show the main points of the proof.

From the lemmas 1 and 2 it follows at once that the number of terms of the sequence (k) , not exceeding x , is equal to the number of system l, p, r , satisfying the relation

$$(7) \quad (kl-p) k^{2r} \leq x.$$

Hence

$$l \leq \frac{p}{k} + \frac{x}{k^{2r}},$$

whence follows that l can have

$$l_{mn} = \left[\frac{m}{k} + \frac{x}{k^{2n}} \right]$$

values, for definite values of $p=m$ and $r=n$. By summing up for $m=1, 2, \dots, k-1$ and $n=0, 1, 2, \dots$, we obtain for the number of systems l, p, r , and thus for $K(x)$, the formula (1). It is easy to show that the number of terms of the sum in this formula is finite for finite value of x .

To deduce the formula (2) it must be observed that the number of the numbers not exceeding x , divisible by a , is $\left[\frac{x}{a} \right]$.

Since the terms of the sequence (k) are of the form

$$(8) \quad qk^{2r},$$

with $(q, k)=1$ (lemma 1), and the number of the form qk^{2r+1} do not belong to this sequence, it follows that the number of numbers of the form (8), for definite value of $r=n$, is

$$\left[\frac{x}{k^{2n}} \right] - \left[\frac{x}{k^{2n+1}} \right].$$

By summing over all $n=0, 1, 2, \dots$ we get for $K(x)$ the formula (2). The last term nonzero of the sum is $(-1)^s \left[\frac{x}{k^s} \right]$, where $s = \left[\frac{\log x}{\log k} \right]$.

Inserting

$$\left[\frac{x}{k^m} \right] = \frac{x}{k^m} - \delta_m, \quad 0 \leq \delta_m < 1,$$

in the formula (2), we obtain by simple calculation the formula (3). Hence it follows immediately

$$K(x) \sim \frac{k}{k+1} x, \quad x \rightarrow \infty.$$

Denoting by a_n the n -th term of the sequence (k) , we get according to the last relation

$$K(a_n) \sim \frac{k}{k+1} a_n, \quad x \rightarrow \infty.$$

Hence and from the formula $K(a_n)=n$ follows (4).

Finally to deduce (6) it is necessary to insert in the (2) $x=n$, n being given by (5). Then first we find

$$\left[\frac{n}{k^m} \right] = c_m + kc_{m+1} + \dots + kr^{-m} c_r,$$

and then it is not difficult to deduce the formula (6).