MILAN S. POPADIĆ

JEDNA RELACIJA IZMEĐU PROSTIH BROJEVA

Neka su

(1) $$p_1, p_2, \cdots, p_n.$$

n prvih uzastopnih prostih brojeva, tj. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd. U ovom radu biće rešavana dva problema: 1° kako se iz podataka (1) može odrediti broj prostih brojeva u intervalu $(p_n, q]$, gde je q pozitivan broj manji od $2p_{n+1}$, a p_{n+1} $n+1$-vi prost broj; 2° određivanje jedne relacije između n prvih uzastopnih prostih brojeva.

Da bi se izveo zadatak pod 1° treba rešiti:

Problem 1. — *Odrediti broj svih prirodnih brojeva oblika*

(2) $$p_{m_1}^{s_1} p_{m_2}^{s_2} \cdots p_{m_n}^{s_n} \leqslant q$$

gde su p_{m_i} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ proizvoljni ali dati prosti brojevi (nije nužno da su uzastopni), a q pozitivan broj — pod pretpostavkom da su i brojevi s_i takođe prirodni brojevi ili nule.

Kako svaki prirodan broj može biti rastavljen na jedan jedini način na proste faktore, sleduje da svakom broju oblika (2) odgovara jedan jedini sistem brojeva s_i i obrnuto. Prema tome broj brojeva oblika (2) jednak je broju sistema brojeva s_i koji zadovoljavaju relaciju (2). — Logaritmovanjem levog i desnog člana nejednačine (2) dobija se

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_n h_n \leqslant l$$

gde je

$$h_i = \log p_{m_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad l = \log q,$$

pod pretpostavkom da je logaritamska osnova veća od jedinice. Odavde sleduje da se rešenje *problema* 1 svodi na rešenje sledećeg zadatka:

Problem 2. — Odrediti broj sistema prirodnih brojeva (podrazumevajući tu i nulu) s_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ koji zadovoljavaju nejednačinu

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_n h_n \leqslant l \tag{3}$$

gde su h_i i l pozitivni brojevi.

Zadatak će biti rešen na taj način što će se prvo običnom indukcijom doći do opšte formule za broj rešenja, koja će zatim biti dokazana matematičkom indukcijom.

Neka je $n=1$. Nejednačina (3) se tada svodi na nejednačinu

$$s_1 h_1 \leqslant l \tag{4}$$

odakle sleduje

$$s_1 \leqslant \frac{h}{l_1}\cdot$$

Prema tome s_1 zadovoljava relaciju

$$0 \leqslant s_1 \leqslant \left[\frac{l}{h_1}\right],$$

gde uglaste zagrade označavaju, kao i obično, najveći ceo broj koji nije veći od broja u zagradi. Odavde sleduje da nejednačina (4) ima

$$\lambda_1(q) = \left[\frac{l}{h_1}\right] + 1 = r_1 + 1 \quad \left(r_1 = \left[\frac{l}{h_1}\right]\right)$$

rešenja. — Neka je sada $n=2$. Nejednačina (3) svodi se na relaciju

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 \leqslant l. \tag{5}$$

Prema tome dobija se

$$s_2 h_2 \leqslant l - s_1 h_1 = l_1,$$

odakle se, na sličan način kao u prvom slučaju, nalazi za broj rešenja nejednačine

$$s_2 h_2 \leqslant l_1,$$

za neku određenu vrednost broja s_1,

$$\lambda_1(q_1) = \left[\frac{l_1}{h_2}\right] + 1 = r_2 + 1,$$

gde je

$$\log q_1 = l_1, \quad r_2 = \left[\frac{l_1}{h_2}\right].$$

Kako s_1 može da ima vrednost ma kog celog broja od 0 do $r_1 = \left[\frac{l}{h_1}\right]$ (uključujući tu i ova dva broja), onda se za broj rešenja nejednačine (5) dobija

$$\lambda_2(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \lambda_1(q_1) = \sum_{s_1=0}^{r_1} (r_2+1) \tag{6}$$

ili

$$\lambda_2(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} r_2 + r_1 + 1. \tag{6'}$$

— Najzad neka je $n=3$. Tada se ima nejednačina

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 + s_3 h_3 \leqslant l \tag{7}$$

odakle sleduje

$$s_2 h_2 + s_3 h_3 \leqslant l - s_1 h_1 = l_1.$$

Prema predhodnom rezultatu ova nejednačina, za određenu vrednost s_1, ima

$$\lambda_2(q_1) = \sum_{s_2=0}^{r_2} (r_3+1)$$

rešenja, gde je

$$r_3 = \left[\frac{l_2}{h_3}\right], \quad l_2 = l_1 - s_2 h_2 = l - s_1 h_1 - s_2 h_2.$$

Broj rešenja nejednačine (7) je tada

$$\lambda_3(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \lambda_2(q_1) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} (r_3+1)$$

ili

$$\lambda_3(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} r_3 + \sum_{s_1=0}^{r_1} r_2 + r_1 + 1.$$

Sada će biti dokazano da je u opštem slučaju za $q \geqslant p_n$

$$(8) \qquad \lambda_n(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_{n-1}=0}^{r_{n-1}} (r_n + 1)$$

gde je

$$r = \left[\frac{l_{i-1}}{h_i}\right] \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$l_0 = l, \quad l_j = l_{j-1} - s_j h_j = l - s_1 h_1 - s_2 h_2 - \cdots - s_j h_j$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Doista formula (8) tačna je za $n = 2$ jer se u tom slučaju svodi na formulu (6), Pretpostavimo sada da je (8) tačno i za $n = k$, tj. da nejednačina

$$s_2 h_2 + s_3 h_3 + \cdots + s_{k+1} h_{k+1} \leqslant l_1$$

ima

$$(9) \qquad \lambda_k(q_1) = \sum_{s_2=0}^{r_2} \sum_{s_2=0}^{r_3} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} (r_{k+1} + 1) \quad (\log q_1 = l_1)$$

rešenja. Iz nejednačine

$$(10) \qquad s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_{k+1} h_{k+1} \leqslant l$$

sleduje

$$s_2 h_2 + s_3 h_3 + \cdots + s_{k+1} h_{k+1} \leqslant l - s_1 h_1.$$

Stavljajući $l - s_1 h_1 = l_1$, a s obzirom na tek učinjenu pretpostavku, broj rešenja poslednje nejednačine, za jednu određenu vrednost broja s_1, dat je formulom (9). Kako s_1 može imati vrednost ma kog celog broja od 0 do r_1 (uključujući i ova dva broja), broj rešenja nejednačine (10) je

$$\lambda_{k+1}(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \lambda_k(q_1)$$

odnosno

$$\lambda_{k+1}(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} (r_{k+1} + 1).$$

Na taj način tačnost formule (8) je dokazana. — Lako se dokazuje da se ona može napisati i u obliku

$$(8') \qquad \lambda_n(q) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i + 1$$

gde je

$$\sigma_0 = r_1, \quad \sigma_i = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_i=0}^{r_i} r_{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Doista iz (8) dobija se

$$\lambda_n(q) = \sigma_{n-1} + \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_{n-2}=0}^{r_{n-2}} \sum_{s_{n-1}=0}^{r_{n-1}} 1.$$

Kako je

$$\sum_{s_{n-1}=0}^{r_{n-1}} 1 = r_{n-1} + 1,$$

posle zamene ovog izraza u prethodnoj formuli, sleduje

$$\lambda_n(q) = \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} + \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_{n-2}=0}^{r_{n-2}} 1.$$

Nastavljajući isti postupak dobija se obrazac (8'), što se takođe jednostavno dokazuje matamatičkom indukcijom.

Treba napomenuti da je $\lambda_n(q)$ simetrična funkcija argumenata p_{m_i} $(i = 1, 2, \cdots, n)$, što se vidi iz samog načina izvođenja formule (8).

Pretpostavimo sada da je $p_{m_i} = p_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ tj. da je mesto n proizvoljnih prostih brojeva dato n prvih uzastopnih prostih brojeva. Neka je pored toga $q < 2p_{n+1}$. Formule (8) i (8′) pretstavljaju tada broj brojeva oblika

$$p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n} \leqslant q.$$

Jasno je da su to svi prirodni brojevi intervala $[1, p_n]$ i svi složeni brojevi intervala $(p_n, q]$. Prema tome obeležavajući broj svih prostih brojeva koji nisu veći od x sa $\pi(x)$, sleduje

$$\pi(q) - \pi(p_n) = [q] - \lambda_n(q).$$

Kako je $\pi(p_n) = n$, dobija se

$$\pi(q) = [q] + n - \lambda_n(q). \tag{11}$$

Najveća vrednost koju može da ima $[q]$ jeste $2p_{n+1} - 1$. Ako bi bilo $q \geqslant 2p_{n+1}$, tada izraz s desne strane znaka jednakosti u relaciji (11) ne bi pretstavljalo broj samo prostih brojeva, već ukupan broj prostih i onih složenih brojeva koji su deljivi nekim prostim faktorom većim od p_n. – Naravno formula (11) ima više teoriski značaj jer je njena praktična primena vanredno glomazna.

Navešćemo sledeći primer. Neka je $n = 4$, dakle neka su data prva četiri prosta broja $2, 3, 5, 7$, i neka je $q = 2.11 - 1 = 21$. Tada imamo prema (11)

$$\pi(21) = 21 + 4 - \lambda_4(21).$$

Sada treba izračunati $\lambda_4(21)$. Dobija se prvo relacjia

$$\lambda_4(q) = 1 + \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

u kojoj je

$$\sigma_0 = r_1 = \left[\frac{l}{h_1}\right],$$

$$\sigma_1 = \sum_{s_1=0}^{r_1} r_2 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \left[\frac{l}{h_2} - s_1 \frac{h_1}{h_2}\right],$$

$$\sigma_2 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} r_3 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \left[\frac{l}{h_3} - s_1 \frac{h_1}{h_3} - s_2 \frac{h_2}{h_3}\right],$$

$$\sigma_3 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \sum_{s_3=0}^{r_3} r_4 = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \sum_{s_3=0}^{r_3} \left[\frac{l}{h_4} - s_2 \frac{h_1}{h_4} - s_2 \frac{h_2}{h_4} - s_3 \frac{h_3}{h_4}\right],$$

gde je

$$l = \log 21,\ h_1 = \log 2,\ h_2 = \log 3,\ h_3 = \log 5,\ h_4 = \log 7.$$

Odavde izlazi

$$\sigma_0 = \left[\frac{\log 21}{\log 2}\right] = 4 = r_1,$$

$$\sigma_1 = \sum_{s_1=0}^{4}\left[\frac{\log 21}{\log 3} - s_1\frac{\log 2}{\log 3}\right] = 5,$$

pri čemu je

$$r_2^0 = 2,\quad r_2^1 = 2,\quad r_2^2 = 1,\quad r_2^3 = r_2^4 = 0.$$

Dalje je

$$\sigma_2 = \sum_{s_1=0}^{4}\sum_{s_2=0}^{r_2}\left[\frac{\log 21}{\log 5} - s_1\frac{\log 2}{\log 5} - s_2\frac{\log 3}{\log 5}\right]$$

$$= \sum_{s_2=0}^{2}\left[\frac{\log 21}{\log 5} - s_2\frac{\log 3}{\log 5}\right] + \sum_{s_2=0}^{2}\left[\frac{\log 21}{\log 5} - \frac{\log 2}{\log 5} - s_2\frac{\log 3}{\log 5}\right]$$

$$+ \sum_{s_2=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 5} - 2\frac{\log 2}{\log 5} - s_2\frac{\log 3}{\log 5}\right] + \left[\frac{\log 21}{\log 5} - 3\frac{\log 2}{\log 5}\right]$$

$$+ \left[\frac{\log 21}{\log 5} - 4\frac{\log 2}{\log 5}\right] = 4,$$

pri čemu je

$$r_3^{00} = 1,\quad r_3^{01} = 1,\quad r_3^{02} = 0,\quad r_3^{10} = 1,\quad r_3^{11} = 0,$$

$$r_3^{12} = 0,\quad r_3^{20} = 1,\quad r_3^{21} = 0,\quad r_3^{30} = 0,\quad r_3^{40} = 0.$$

Najzad je

$$\sigma_3 = \sum_{s_3=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 7} - s_3\frac{\log 5}{\log 7}\right] + \sum_{s_3=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 7} - \frac{\log 3}{\log 7} - s_3\frac{\log 5}{\log 7}\right]$$

$$+ \left[\frac{\log 21}{\log 7} - 2\frac{\log 3}{\log 7}\right] + \sum_{s_3=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 7} - \frac{\log 2}{\log 7} - s_3\frac{\log 5}{\log 7}\right]$$

$$+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-\frac{\log 2}{\log 7}-\frac{\log 3}{\log 7}\right]+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-\frac{\log 2}{\log 7}-2\frac{\log 3}{\log 7}\right]$$

$$+\sum_{s_3=0}^{1}\left[\frac{\log 21}{\log 7}-2\frac{\log 2}{\log 7}-s_3\frac{\log 5}{\log 7}\right]+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-2\frac{\log 2}{\log 7}-\frac{\log 3}{\log 7}\right]$$

$$+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-3\frac{\log 2}{\log 7}\right]+\left[\frac{\log 21}{\log 7}-4\frac{\log 2}{\log 7}\right]=3.$$

Dakle dobija se

$$\lambda_4(21)=1+4+4+5+3=17,$$

a odavde sleduje

$$\pi(21)=25-17=8.$$

Sada se lako rešava zadatak pod 2^0. Doista s obzirom na značenje funkcije $\lambda_n(q)$, ili još jednostavnije, zamenom u (11) $q=p_n$ ili $q=p_{n+1}$ (pošto je $p_{n+1}<2p_{n+1}$), sleduje

$$p_n=\lambda_n(p_n) \tag{12}$$

odnosno

$$p_{n+1}=\lambda_n(p_{n+1})+1. \tag{13}$$

Formule (12) i (13) daju relacije između prvih n odnosno $n+1$ prostih brojeva. Prema tome ceo pozitivan broj koji zadovoljava jednačinu

$$x=\lambda_n(x)$$

ili

$$x=\lambda_n(x)+1$$

pretstavlja prost broj p_n odnosno p_{n+1}. U prvoj jednačini je dakle p_n definisano kao implicitna funkcija prostih brojeva $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$, a u drugoj p_{n+1} takođe kao implicitna funkcija svi prethodnih prostih brojeva.

Primedba. Jedna relacija između svih prostih brojeva koji nisu veći od x, i koja definiše najveći od njih kao funkciju svih prethodnih, bila je poznata već Legendre-u*. To je relacija:

$$[x]!=\prod_{p_i\leq x} p_i^{\left[\frac{x}{p_i}\right]+\left[\frac{x}{p_i^2}\right]+\cdots}$$

* E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, 1909, B. I, str. 75, B. II, str. 884. Teubner, Leipzig.

J. Braun** je posmatrao specijalan slučaj ove formule, a C. Isenkrahe*** koristio ju je za određivanje eksplicitne formule za p_{n+1}.

M. S. Popadić

A RELATION BETWEEN THE PRIME NUMBERS

(Summary)

Let

(1) $$p_1, p_2, \cdots, p_n$$

be n first consecutive primes — i. e $p_1=2$, $p_2=3$ and so on. In the following we solve the two problems: 1° determine from the data (1) the number of primes of the interval $(p_n, q]$, q being real less than $2p_{n+1}$ and p_{n+1} the next prime to p_n; 2° determine a relation between n first consecutive primes.

At first it is necessary to solve the following:

Problem I. *Determine the number of all natural numbers of the form*

(2) $$p_{m_1}^{s_1}\, p_{m_2}^{s_2} \cdots p_{m_n}^{s_n} \leqslant q,$$

p_{m_i} $(i=1, 2, \cdots, n)$ *being any given primes (unnecessarily consecutive ones),* q *a positive number, assuming that* s_i *are natural numbers or zeros.*

From the fact that every natural number can be factored uniquely into prime factors, follows that to every number of the form (2) corresponds one system only of the numbers s_i and vice versa. Thus, the number of numbers of the form (2) is equal to the number of the systems of the numbers s_i satisfying the relation (2). Logarithming both sides of the inequality (2), we obtain

$$s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_n h_n \leqslant l$$

where

$$h_i = \log p_{m_i} \quad (i=1, 2, \cdots, n), \quad l = \log q,$$

assuming the base of the system of logarithms to be greater than 1. In order to solve the problem I, it is necessary to solve:

Problem II. *Determine the number of the systems of natural numbers, including as well zero,* s_i (i=1, 2, $\cdots$, n), *which satisfy the inequality*

(3) $$s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_n h_n \leqslant l,$$

where h_i *and* l *are positive numbers.*

** Braun, *Das Fortschreitungsgesetz der Primzahlen durch eine transcendente Gleichung dargestellt* (Programmabhandlung № 496, Jahresbericht des Fr. Wilh. Gymnasiums in Trier, 1899).

*** C. Isenkrahe, *Ueber eine Lösung der Aufgabe, jede Primzahl als Funktion der vorhergehenden Primzahlen durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen* (Mathematische Annalen, B. 53, str. 42).

Denoting by λ_n (q) tke number of solutions of the inequality (3), we can prove by mathematical induction the formula:

$$(4) \qquad \lambda_n(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_{n-1}=0}^{r_{n-1}} (r_n + 1),$$

where

$$r_i = \left[\frac{l_{i-1}}{h_i}\right] \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

and

$$l_0 = l, \quad l_j = l_{j-1} - s_j h_j = l - s_1 h_1 - s_2 h_2 - \cdots - s_j h_j \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

It easy to show that this formula is true for $n=1$ and $n=2$. Let us assume now that (4) is true for $n=k$, i. e. that inequality

$$s_2 h_2 + s_3 h_3 + \cdots + s_{k+1} h_{k+1} \leqslant l,$$

has

$$(5) \qquad \lambda_k(q_1) = \sum_{s_2=0}^{r_2} \sum_{s_3=0}^{r_3} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} (r_{k+1}+1) \qquad (\log q_1 = l_1)$$

solutions. From the inequality

$$(6) \qquad s_1 h_1 + s_2 h_2 + \cdots + s_{k+1} h_{k+1} \leqslant l$$

follows

$$s_2 h_2 + s_3 h_3 + \cdots + s_{k+1} h_{k+1} \leqslant l - s_1 h_1$$

Putting $l - s_1 h_1 = l_1$ and according to the above hypothesis, the number of solutions of the last inequality, for a definite value of the s_1, is given by the formula (5). By summing over all values of the s_1, we obtain for the number of solutions of the inequality (6):

$$\lambda_{k+1}(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \lambda_k(q_1)$$

or

$$\lambda_{k+1}(q) = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_k=0}^{r_k} (r_{k+1}+1)$$

Thus exactness of general formula (4) is proved. — It is easy to show that (4) can be written also

(4′)
$$\lambda_n(q) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i + 1,$$

where

$$\sigma_0 = r_1, \quad \sigma_i = \sum_{s_1=0}^{r_1} \sum_{s_2=0}^{r_2} \cdots \sum_{s_i=0}^{r_i} r_{i+1} \quad (i=1, 2, \cdots, n-2).$$

It should be noted that $\lambda_n(q)$ is a symmetrical function of the arguments p_{m_i} $(i=1, 2, \cdots, n)$, what can be seen from the manner used to deduce the formula (4).

Now let assume $p_{m_i} = p_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ and $q < 2p_{n+1}$. The formulae (4) and (4′) represent then the number of all numbers of the form

$$p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n} \leqslant q.$$

It is clear that to this set of numbers belong all natural numbers of the interval $[1, p_n]$ and all composite numbers of the interval $(p_n, q]$. Hence denoting by $\pi(x)$ the number of all primes not exceeding x, we have

$$\pi(q) - \pi(p_n) = [q] - \lambda_n(q).$$

For $\pi(p_n) = n$, we get

(7)
$$\pi(q) = [q] + n - \lambda_n(q)$$

The greatest value of the $[q]$ is $2p_{n+1} - 1$ (if $q \geqslant 2p_{n+1}$, then the right side of the equality (7) represents the number of all primes and composite numbers, divisible by a prime exceeding p_n).— We remark that the formula (7) has rather a theoretical significance, for its application is very inconvenient.

In the original paper is computed $\pi(21)$ for $n=4$.

It is now easy to solve also the problem 2.

According to the signification of the function $\lambda_n(q)$, or still simpler, inserting $q = p_n$ or $q = p_{n+1}$ in (7) (since $p_{n+1} < 2p_{n+1}$), we obtain

(8)
$$p_n = \lambda_n(p_n)$$

and

(9)
$$p_{n+1} = \lambda_n(p_{n+1}) + 1.$$

The formulae (8) and (9) represent the relations between n and $n+1$ respectively first primes. Thus the number which satisfies the equation

$$x = \lambda_n(x)$$

or

$$x = \lambda_n(x) + 1$$

represents prime p_n and p_{n+1} respectively. In both formulae the greatest prime is determined as implicite function of all previous primes.

A remark. A relation between first primes $\leqslant x$ was known to Legendre. It is the relation

$$[x]! = \prod_{p_i \leqslant x} p_i^{\left[\frac{x}{p_i}\right] + \left[\frac{x}{p_i^2}\right] + \cdots},$$

which determines the greatest prime $\leqslant x$ as funktion of all previous prims*.

* See the footnotes at the end of the original paper.