ЗА ЕДНА ЗАДАЧА ЗА ПАРАБОЛА

ДАНИЦА Р. ПЕРЧИНКОВА

Во школската пракса често пати, заради уштеда на време, се работат задачи, што се така подесени да им се резултатите изразени со рационални броеви, па дури и со цели. Ова е особено згодно, и треба да се практикува најчесто, кога сакаме на некои примери да покажиме ново градиво. И да би се истакнало она што е важно, што е битно, се препорачува да немаме тешкотии од нумерички карактер.

Но, ако е уобичаено да се работат секогаш само такви примери, чии резултати се рационални броеви, тоа тогаш негативно се одразува на математичката култура на учениците, така да кај нив се создава погрешно сфаќање и многу од нив ги сметаат како погрешни оние резултати кои не се рационални броеви, па дури и цели.

Сепак како што наведовме малку погоре за некои задачи е потребно да бидат такви, што резултатите да им се изразени со рационални броеви.

Точно затоа, во овој чланок, сакаме да изнесеме, како лесно можат да се составаат примери за задачи за изнаоѓање равенки на тангенти повлечени од една точка на дадена парабола, под услов да агловите коефициенти на тие тангенти бидат рационални броеви.

Во белгискиот часопис *Mathesis* (книга 49, 1935, стр. 369) професор *Митриновић* го дал овој резултат:

Ако се α, β, $2p$, *рационални броеви, кои чинат три последователни члена на една аритметичка прогресија, т. е. ако се:*

$$\alpha = 2p - 2r \quad \text{и} \quad \beta = 2p - r, \tag{1}$$

каде r *е разлика на прогресијата, агловите коефициенти на тангентите повлечени низ точката* (α, β) *на параболата*

$$y^2 = 2px$$

се рационални броеви.

Тоа се докажува на следниот начин:
Земаме една права

$$y = mx + n$$

која е таква, да врви низ една точка со координати (α, β) и е тангента на параболата $y^2 = 2px$.

Исползувајќи го условот да правата врви низ точката (α, β), добиваме да е

$$n = \beta - \alpha m.$$

Условот да правата биде тангента на дадената парабола ни дава:

$$2\alpha m^2 - 2\beta m + p = 0$$

или, ако ги замениме α и β со нивните вредности (1)

$$4(p - r)m^2 - 2(2p - r)m + p = 0.$$

Од тука добиваме две вредности за m,

$$m_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{p}{2(p - r)} = \frac{p}{\alpha}$$

кои се значи навистина рационални.

Митриновиќ уште го искажува наведениот резултат на следниот начин:

Ако на тангентата на параболата $y^2 = 2px$, со аглов коефициент $\frac{1}{2}$ (во допирната точка $x = y = 2p$) се земе точка со апсциса α, агловиот коефициент на другата тангента од оваа точка е равен на $\frac{p}{\alpha}$.

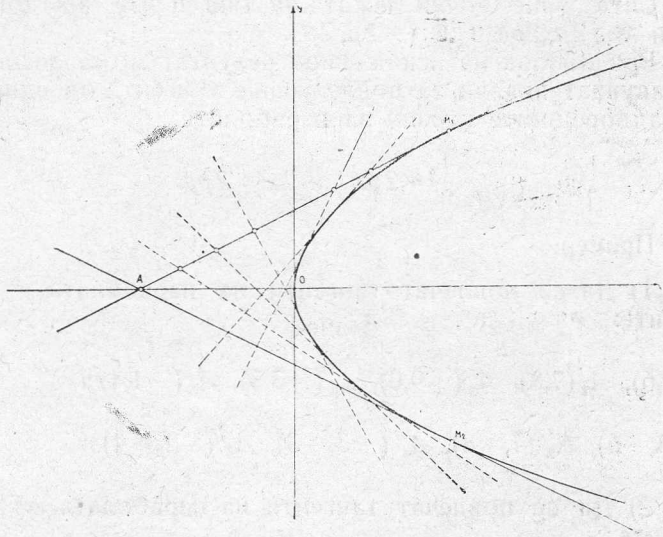
Тоа геометриски изгледа вака: (види сл. 1)

Значи, тангентата во M_1 (сл. 1) е таква права, која содржи такви точки (α, β), кои со $2p$ чинат три последователни члена на една аритметичка прогресија.

Целта на овој чланок е да покажеме да може да се прошири дадениот резултат од Митриновиќ.

Самата слика веќе не наведува да мислиме дека постои и друга права со аналогни особини како правата AM_1, (сл. 1), која содржи такви точки, од кои ако повлечеме тангенти на дадената парабола, добиваме да тие имаат за аглови коефициенти рационални броеви.

Тоа е правата, која е симетрична, по однос x-оската на тангентата во M_1 (сл. 1). Сите точки имено, кои се симетрични по однос x-оската на точките што лежат на тангентата AM_1 и чии што координати се рационални броеви, имаат исто така рационални координати, и тоа со исти апсциси, а ординати исти по апсолутна вредност и обратни по знак. Значи во овој случај за точки со апсциса α одговараат ординати $-\beta$. Сите овие точки лежат сега на правата, која врви низ точките A и M_2 и е тангента на дадената паробола во допирната точка M_2 $(2p, -2p)$ на сл. 1.



Значи, резултатот од *Митриновић* може да се прошири и да се изкаже на следниот начин:

Нека се $\alpha, |\beta|, 2p$ *рационални позитивни броеви, кои чинат три последователни члена на една аритметичка прогресија, т. е.*

$$\alpha = 2p - 2r \quad \text{и} \quad |\beta| = |2p - r|,$$

каде што r *е разлика на прогресијата, агловите коефициенти на тангентите, повлечени низ точката* $(\alpha, |\beta|)$ *на параболата* $y^2 = 2px$ *се рационални броеви.*

Значи сите точки со рационални координати $(\alpha, |\beta|)$, кои го задоволуваат барањето да $\alpha, |\beta|, 2p$ чинат три последователни члена на една аритметичка прогресија, лежат на тангентите на параболата $y^2 = 2px$ повлечени во допирните точки $M_1(2p, 2p)$ и $M_2(2p, -2p)$ на сл. 1.

Истата теорема важи и за параболата $x^2 = 2py$. За овој случај таа може да се формулира вака:

Ако се $2p, |\alpha|, \beta$ позитивни рационални броеви, кои чинат три последователни члена на една аритметичка прогресија, т. е. ако се:

$$|\alpha| = |2p - r| \quad \text{и} \quad \beta = 2p - 2r,$$

каде што $-r$ е разлика на прогресијата, тогаш агловите коефициенти на тангентите, кои минаваат низ точките $(|\alpha|, \beta)$ на пароболата $x^2 = 2py$ се рационални броеви.

Сите овие точки лежат на тангентите во допирните точки $M_1(2p, 2p)$ и $M_2(-2p, 2p)$.

Врз основа на искажаниот резултат може лесно да се составуваат задачи за повлекување тангенти од една точка од надворешните страни на параболите

$$y^2 = 2px \quad \text{и} \quad x^2 = 2py.$$

Примери:

1) Да се повлечат тангенти на параболата $y^2 = 9x$ од точките:

$A_1(3,6)$, $A_2(7,8)$, $A_3(-9,0)$, $A_4(-3,3)$, $A_5(-1,4)$;

$A_1'(3,-6)$, $A_2'(7,-8)$, $A_4'(-3,-3)$, $A_5'(-1,-4)$

2) Да се повлечат тангенти на параболата $x^2 = 4y$ од точките:

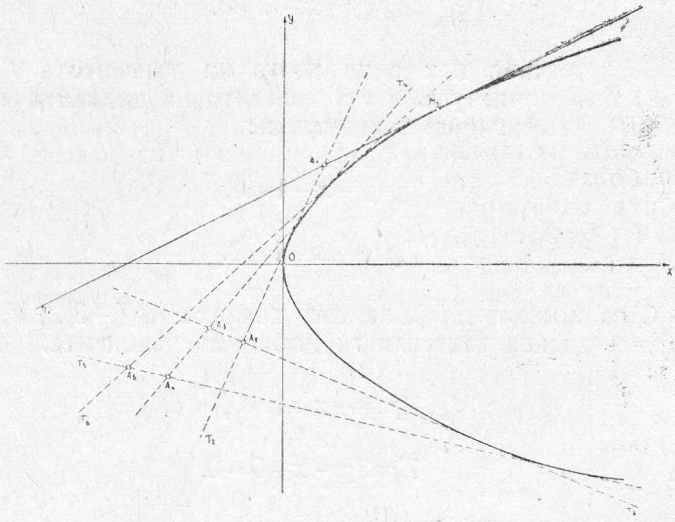
$B_1(2,0)$, $B_2(3,2)$, $B_3(1,-2)$;

$B_1'(-2,0)$, $B_2'(-3,2)$, $B_3'(-1,-2)$.

Понатаму можеме да ги дадеме и овие забелешки за параболата $y^2 = 2px$.

Ако во една точка со рационални координати на параболата $y^2 = 2px$ (каде што p е рационален број) повлечеме тангента на истата парабола таа ќе биде таква да ќе има за аглов коефициент рационален број. Нека сега од една точка A_1 (сл. 2) со рационални координати на тангентата T_1 повлечеме тангенти на параболата. Едната тангента веќе е T_1 и има за аглов коефициент рационален број, а другата е T_2, за која пак следува да има за аглов коефициент рационален број, затоа што двете вредности за агловите коефици-

енти се корени на една квадратна равенка со рационални коефициенти. А штом едниот корен е рационален број, тоа таков мора да биде и другиот.



сл. 2

Сега истото тоа можеме да го примениме на една точка A_2 (сл. 2) со рационални координати од тангентата T_2. И тука веќе знаеме да едниот аглов коефициент е рационален број, што значи да мора да биде и другиот.

Оваа постапка можеме така да ја применуваме за секоа нова тангента така да ќе ги добиеме сите рационални точки од равнината од надворешната страна на параболата $y^2 = 2px$, од кои ако повлечеме тангенти на дадената парабола тие ќе имаат за аглови коефициенти рационални броеви.

Пример:

Нека ни е дадена параболата

$$y^2 = 4x,$$

и од точката $M_1(4,4)$ на оваа парабола повлечеме тангента T_1. Оваа тангента има за аглов коефициент рационален број и нејната равенка е:

$$T_1 \equiv 2y - x - 4 = 0,$$

Нека сега од точката $A_1(2,3)$ на ова тангента повлечеме тангенти на параболата $y^2=4x$. Едната тангента е T_1 а другата T_2 чија равенка е:

$$T_2 \equiv y - x - 1 = 0.$$

Сега зимаме пак една точка на тангентата T_2 напр. A_2 $(-1,0)$ и повлечуваме пак тангенти на дадената парабола. Равенките на овие тангенти се:

$$T_2 \equiv y - x - 1 = 0,$$

$$T_3 \equiv y + x + 1 = 0.$$

Сега можеме да ја земеме точката A_3 $(-3,2)$ и повлечувајќи и од неа тангенти ги добиваме равенките:

$$T_3 \equiv y + x + 1 = 0,$$

$$T_4 \equiv 3y - x - 9 = 0.$$

Низ точката A_4 $(-1, \frac{8}{5})$ ги добиваме тангентите:

$$T_4 \equiv 3y - x - 9 = 0,$$

$$T_5 \equiv 3y + 9x + 1 = 0.$$

и така можеме да продолжиме колку што сакаме.