ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ, СКОПЈЕ
FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ОДДЕЛ
SECTION DES SCIENCES NATURELLES
ПОСЕБНИ ИЗДАНИЈА, КНИГА 1 * ÉDITIONS SPÉCIALES, LIVRE 1

ЈОЖЕ УЛЧАР

Елементарно-геометриски пресликувања и групен принцип во геометријата

СКОПЈЕ — SKOPJE
1950

Печатница на Филозофскиот факултет — Скопје

ПРЕДГОВОР

Во овој чланок сакаме да покажеме какво значење има воведувањето на поимот за геометриско пресликување и на поимот за група геометриски пресликувања во геометријата.

Ограничувајќи се на еквиформни, афини и проективни пресликувања ќе покажеме како секоја група пресликувања определува по една геометрија, т. е. како се исползува поимот за трансформациони групи за системна поделба на целокупната област на геометријата — според идеите на Felix Klein, разработени во неговиот „Програм-Ерланген"[1]).

Од друга страна ќе укажеме едновремено со неколку примери и на практичната полза што ја имаме од геометриските пресликувања.

Чланокот е наменет преди сè за тоа да послужи како литература за стручно усовршување на средношколските наставници по математика, а нарочно за оние што немале можност нормално да ги свршат факултетските студии. Затоа е пишан елементарно, со избегнување на употребата на аналитичкиот апарат.

Ваков начин на излагање е условен со внесување на извесна оригиналност во изведувањата. Поради тоа требаше на повеќе места (на пр. во глава V) да се дадат оригинални докази или скици на докази за разни теореми.

Читател што не сака подетајлно да ги прати изведувањата, може оние оддели што се печатени со петит да ги прескокнува. Текстот е пишуван така да е разбирлив и без тие партии.

---

[1]) Felix Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen, 1872 (печатено во Mathematische Annalen, Bd. 43, 1893, стр. 63 и сл.).

I. ГЕОМЕТРИСКИ ПРЕСЛИКУВАЊА

Онаа улога што ја игра во математичката анализа[2]) поимот за функција, ја има во геометријата поимот за геометриски пресликувања.

Поимот за геометриско пресликување не е ништо друго освен на известен начин обопштен поим за функција.

Определењето на поимот за функција може да се формулира вака:

Величината y е функција од аргументот x, ако на секое бројно значење што смее да го завземе аргументот, одговара некое наполно определено бројно значење на y.

За да биде една функција определена, спрема оваа дефиниција, потребно е да ни е дадено:

прво, множенство[3]) на дозволените значења[4]) на аргументот;

второ, законот за кореспонденца кој што за секое дадено значење на аргументот определува единствено[5]) значење на функцијата.

Законот (конвенција) за кореспонденца може да биде даден на различни начини: со формула, табела, опис и слично.

---

[2]) Математиката можеме да ја поделиме на два дела, геометрија и анализа. Терминот анализа доаѓа од насловот на Euler-овиот труд »Introductio in analysin infinitorum« (1748) и означува совкупност на сите оние математички дисциплини што се изградуваат само на поимот број.

[3]) Секоја совкупност од некои работи, на пр. ученици в еден клас, јаболка в кошница, сите природни броеви, се вика множество, а оние работи што го образуваат множеството се викаат елементи од тоа множество.

Множество е основен поим во математиката, и спрема тоа не може да се дефинира со помошта на попрости поими. Може само да се појасни, илустрира со примери.

[4]) т. е. оние значења што аргументот смее да ги завземе (множеството на овие значења се вика „дефинициона област“ на функцијата).

[5]) тука е дадена дифиниција на ткн. еднозначни функции (од еден аргумент).

Примери:

1. Кубатурата V на една коцка е функција на нејзиниот раб a.

Множеството на дозволените значења на аргументот при оваа функција го сочинуваат сите позитивни броеви (земајќи една единица мерка за должина, на пр. cm).

Законот за кореспонденца е даден со формулата (единица мерка за кубатурата е cm^3)

$$V = a^3.$$

2. Бројот N на диагоналите во еден конвексен полигон е функција од бројот n на неговите страни.

Множеството на дозволените значења тука е

$$3, 4, 5, 6, \dots ,$$

бидејќи многуаголникот може да има три, четири, пет, ... страни.

Законот за кореспонденца е даден со од планиметрија познатата релација

$$N = \frac{1}{2} n (n - 3).$$

3. Волуменот V од 1 g вода (при 760 mm Hg) е функција од нејзината температура t.

Прецизни мерења даваат овие резултати[6]) (температурата е мерена во Целзиусови степени, волуменот во cm^3):

t	v
0	1, 000 13
1	1, 000 07
2	1, 000 03
3	1, 000 01
4	1, 000 00
5	1, 000 01
6	1, 000 03
7	1, 000 07
8	1, 000 12

[6]) Табелата е земена од книгата A. Ostrowski, Vorlesungen über Differential — und Integralrechnung, стр. 45, Basel, 1945.

Левата колона ни го определува множеството на аргументот, а законот за кореспонденца ни го дава самата табела.

Никаква тешкотија не ни претставува сега задачата да го обопштиме овој поим за функција. Јасно е дека не треба да ги менуваме двете барања со кои што функцијата е дефинирана. Но можеме да го промениме материјалот со кој што работиме. До сега оперираме со броевите: дадено беше едно множество броеви (множество на дозволените значења на аргументот), а на секој број од това множество му одговараше — како што тоа го бара законот за кореспонденца — по еден друг број од едно друго множество броеви.

Броевите се градивен материал во математичката анализа. Во геометријата како градивен метериал можат да се земат таканаречените основни геометриски поимови: точка, права и рамнина. Затоа, сакајќи да го обопштиме поимот за функција за нуждите на геометријата, не ни е туѓа идејата да го оставаме самото определење на функцијата неизменето, но како елементи на вопросните множества да не земаме броеви, туку геометриските поими точка, права и рамнина. Со обопштување би можеле да одиме уште понатаму, земајќи како елементи во множествата и други геометриски поими на пр. топкини површнини и сл.

Кога имаме предвид вакви обопштени „функции" не го употребуваме веќе терминот функција, туку убавиот наш израз „геометриско пресликување".

На тој начин, термините „функција" и „геометриско пресликување" можат, во извесна смисла, да се сметаат како синоними.

Денес поимот за функција еволуира уште повеќе. За елементи на множествата на аргументот и функцијата се земат какви и да е обекти. Вакви дефиниции се даваат веќе и во учебниците за воведување во вишата анализа [7]). За вака дефинираните функции се јавуваат како функциите што ги дефиниравме горе така и геометриските пресликувања како специјален случај.

Нарочно важни се оние пресликувања кои што се обопштенија на взаемно-еднозначените функции.

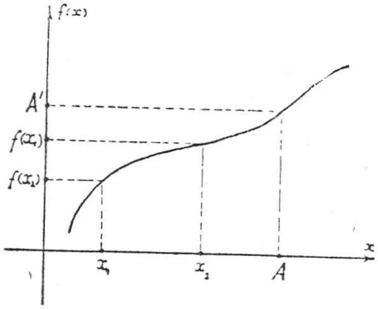
Функција се вика взаемно-еднозначна на некое множество, ако за произволни две различни значења на аргуменот одговараат две различни значења на функцијата.

---

[7]) На пр. учебникот И. С. Моденов — Г. Л. Невяжский, Курс высшей математики, Москва, Огиз, 1948.

Функцијата, дефинирана со графикот даден на сл. 1[8]), очигледно е таква функција. Од графикот се гледа дека за две кои и да е разни значења x_1 и x_2 на аргументот добиваме две различни значења $f(x_1)$ и $f(x_2)$ на функцијата[9]).

Овој график едновремено определува едно пресликување на точки, имено на точките од x-оска во точките од y-оска: точката A (сл. 1) се пресликува во точката A'. Ова пресликување на точки е взаемно-еднозначно пресликување на множеството точки од x-оска.



Сл. 1

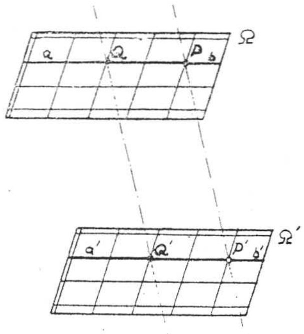
Општо, секое пресликување при кое што на секои два различни елементи (на пр. точки) од некое дадено множество елементи одговараат два различни елементи од некое друго множество елементи се вика взаемно-еднозначно пресликување на првото множество.

[8]) Функцијата, дефинирана со овој график, е монотона.

[9]) Аналитички лесно се покажува дека монотоните функции се взаемно-еднозначни.

II. КОНГРУЕНТНО И ЕКВИФОРМНО ПРЕСЛИКУВАЊЕ

Најпрости геометриски пресликувања се оние при кои што елементите на даденото множество, како и на множеството што се добива след пресликувањето, се точки. Ние ќе се запознаеме имено со некои такви пресликувања. За да го упростиме разгледувањето уште повеќе, ќе се ограничиме на пресликувања на рамнински фигури[1]), т. е. на фигури што лежат во една рамнина. Елементите што ни се дадени се, значи, сите точки од некоја рамнина. Тие треба, на некој начин, според некој претпис — законот за кореспонденца — да се „пресликаат" во точките на некоја друга рамнина, т. е. на секоја точка од првата рамнина треба да и' одговара една точно определена точка од другата рамнина.



Сл. 2

Ќе наведеме два најпрости примери на пресликување од овој тип.

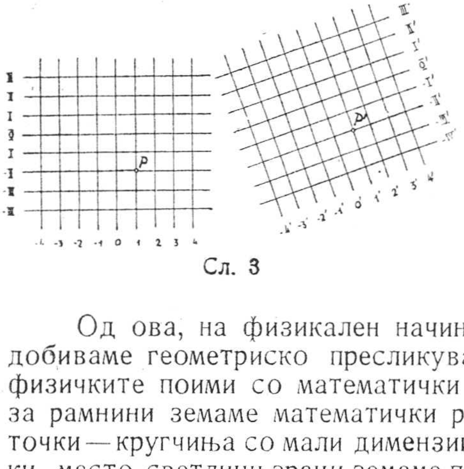
Нека ни послужи како модел на едната рамнина една стаклена плоча, а еден бел картон како модел на другата рамнина. Таа плоча и картонот нека се наоѓаат каде и да е во пространството на некоја затемнета стаја, но така да бидат меѓу себе паралелни. Ако на стаклената плоча паѓаат

[1]) Под фигура, поточно геометриска фигура, разбираме секоја совкупност од точки.

паралелни светлини зраци, тогаш секоја точка P, на стаклената плоча обележена грубо со мало кругче, фрла на картонот сенка P'. На тој начин добиваме експериментално едно пресликување, бидејќи на секоја точка од првата рамнина и' одговара точно една точка, нејзината „сенка", на втората рамнина.

При ова пресликување точките од секоја права $a\ b$ од првата рамнина (рамнина Ω на сл. 2) се пресликуваат во точките што пак лежат на една права $a'\ b'$ од втората (рамнина Ω' на сл. 2). Затоа викаме дека при ова пресликување права се пресликува во права. При тоа, растојанието на секои две точки P, Q од која да е права еднакво е на растојанието $P'\ Q'$ на пресликаните точки P', Q'.

Поради тоа, при ова пресликување, секоја фигура се пресликува во фигура, складна со првата. Така на пр. секоја квадратна мрежа[2]) пак се пресликува во квадратна мрежа, конгруентна со првата (сл. 2).



Сл. 3

Сл. 4

Од ова, на физикален начин определено пресликување, добиваме геометриско пресликување кога ќе ги замениме физичките поими со математички апстракции. Место модели за рамнини земаме математички рамнини, место модели за точки — кругчиња со мали димензии — земаме математички точки, место светлини зраци земаме прави — „проицирни прави". Сликата е опредделена со пресекот на проицирна права со втората рамнина, но сликата не ја викаме веќе сенка, туку проекција.

Тоа беше еден пример на пресликување на точките од една рамнина во точки на некоја друга рамнина. Но може да има и пресликување на точки од една рамнина во точки на истата рамнина. Во нашиот пример треба само по извршеното пресликување втората рамнина да ја прене-

---

[2]) т. е. две фамилии паралелни и еквидистантни прави (растојанието меѓу две соседни паралелни прави е исто при двете фамилии), каде што правите од едната фамилија се нормални на правите од втората фамилија.

семе во пространството така да совпадне со првата, и ќе имаме едно такво пресликување (сл. 3). При овие пресликувања секоја фигура се пресликува во друга, конгруентна со неа, но која што од оригиналната фигура се разликува по положајот што го има во рамнината. Поради тоа, овој вид пресликување се вика конгруентно пресликување.

Но ова пресликување можеме да го толкуваме и како „движење".

Да земеме две рамнини да се совпаднуваат. Секоја фигура што лежи на некоја од нив нека е тврдо „врзана" со неа. Едната рамнина нека останува неподвижна, а втората нека се слизга по првата, заедно со фигурата, врзана со неа. При тоа може, евентуално, рамнината да се сврти околу некоја права, што лежи на неа, за два прави агла. Резултатот на вакво движење е очигледно ист како оној што го добиваме при гореспоменатото пресликување.

При тоа треба да се подвлече дека поимот за геометриско движење не е идентичен со поимот за движење, што го изучуваме во кинематиката. При геометриските движења не интересува само резултатот на движењето, а сосем не се интересуваме за самиот процес што ја пренесува фигурата од началното во крајното положение.

Спрема тоа, геометриско движење претставува една апстракција во однос на кинематичкото движење. (Види Н. М. Бескин, Методика геометрии, Москва, Учпедгиз, 1947; стр. 96).

Еден друг пример на геометриско пресликување имаме во „уголемувањето" на сликите, приближно онака како што тоа го прави фотографот. Тој ја осветлува дадената фигура со зраци што излегуваат од еден светлинен извор S (види сл. 4). Сенката што ја фрла фигурата на некој заслон (рамнина), положен паралелно со рамнината во која што лежи фигурата, е слика од дадената фигура. Во црт. 4 како фигура што треба да се увеличи земена е една квадратна мрежа. Стереометријата не учи дека и сенките образуваат квадратна мрежа, само со увеличени квадрати.

Овој начин на формирање слики го идеализираме на сличен начин како во предодниот пример. Светлиниот извор го сменуваме со математична точка, светлините зраци со прави. Сликата P' на произволната точка P од рамнината Ω (сл. 4) е пресек на правата SP со рамнината Ω'. Сликата P' од P ја викаме сега централна проекција на точката P; централна затоа што сите проицирни зраци минуваат низ една точка, центарот на проицирането.

За да имаме пресликување меѓу точките од една и иста рамнана треба уште рамнината Ω' да ја пренесеме во рамнината Ω (сл. 5).

При ова пресликување секоја фигура се пресликува во некоја фигура, слична со првата (на пр. триаголникот

ABC на сл. 5). Затоа го викаме сличносно или еквиформно пресликување.

Очигледно еквиформното пресликување може да се окарактеризира вака:

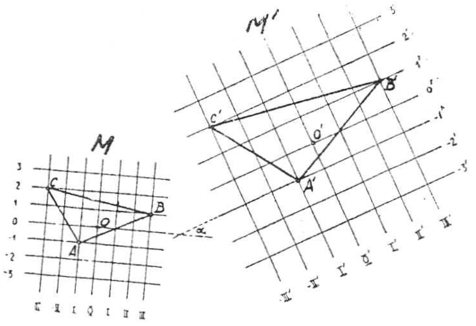
Еквиформно пресликување е такво пресликување при кое што секоја квадратна мрежа се пресликува пак во некоја квадратна мрежа.

Оттука е јасно дека:

1) при секое еквиформно пресликување прав агол се пресликува во прав агол;

2) паралелни прави се пресликуваат секогаш во паралелни прави; и

3) ако пред пресликувањето некоја точка лежи на некоја права, тогаш секогаш и пресликаната точка лежи на пре-



Сл. 5

сликаната права (ако точката и правата се инцидентни пред пресликувањето, тогаш тие се инциденти и след него).

Тоа се три основни особини на еквиформни пресликувања.

Така дадовме два примери за пресликувања, дефинирани геометриски. Но тоа може да стане и по аналитичен пат. И токму овој последен начин е често поважен. Затоа и ние сакаме да покажеме што одговара алналитички на конгруентното н еквиформното пресликување.

Едно еквиформно пресликување е определено, ако знаеме во која квадратна мрежа ќе се преслика некоја дадена квадратна мрежа. Така мрежите на сл. 5 ни определуваат две пресликувања: пресликување кое што ја преслика мрежата M во мрежата M′, и пресликување кое што ја преслика мрежата M' во мрежата M. Да се задржиме на првото од овие две пресликувања.

Двете прави од мрежата M, сигнирани со 0, ги избираме како оски на правоагла координатна система, а растојањето меѓу две соседни паралелни прави како единица мера. Правите чии што равенки се

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \quad y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

се токму правите од мрежата.

За да биде пресликаната мрежа определена треба да го знаеме положајот на сликата O′ од O, аголот што го зафаќа која да е права од мрежата M со својата слика, и за колку единици се оддалечени две соседни паралелни прави од пресликаната мрежа. Положајот на точката O′ нека ни е даден со нејзините координати p, q, вопросниот агол нека е α, а растојањето на кои да е две паралелни прави од мрежата M′ нека е к.

Апсцисната оска се, значи, пресликува во правата

$$y' - q = \mathrm{tg}\alpha\,(x' - p)$$

или

$$(1) \qquad (y' - q)\cos\alpha - (x' - p)\sin\alpha = 0.$$

Правата $y = y_0$, т.е. правата што е оддалечена од апсцисната оска y_0 единици, се пресликува во права која што од правата (1) е на растојање ky_0 единици, значи во правата

$$(2) \qquad (y' - q)\cos\alpha - (x' - p)\sin\alpha - ky_0 = 0.$$ [3]

Равенката на правата во која што се пресликува правата $x = x_0$ ја добиваме, ако во равенката (2) аголот α го смениме со $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$, а y_0 со x_0. Сликата на $x = x_0$ е следователно

$$(3) \qquad (y' - q)\sin\alpha + (x' - p)\cos\alpha \pm kx_0 = 0.$$

Точката (y_0, y_0) се пресликува во пресекот на правите (2) и (3). Координатите на пресликаната точка се, значи, решенијата на системата линеарни равенки (2) и (3), имено

$$(4) \qquad \begin{aligned} x' &= k(\pm x\cos\alpha - y\sin\alpha) + p \\ y' &= k(\pm x\sin\alpha + y\cos\alpha) + q, \end{aligned}$$

каде што место x_0, y_0 пишавме x, y.

При избор. на произволна правоагла картезична координатна система равенките (4) ни определуваат за секоја нумерична вредност на параметрите k, p, q, α по едно еквиформно пресликување. Тоа значи дека точката со координатите

---

[3]) Знакот на к определува на која страна од правата (1) лежи правата (2).

x, y се пресликува во точката чии што координати x', y' ги пресметуваме со помошта на равенките (4), а извршеното пресликување е еквиформно.

Ако избереме во системата (4), специално, $\kappa = 1$, ја добиваме системата

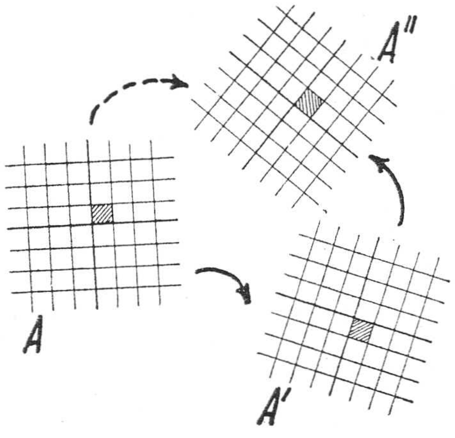
$$x' = \pm x \cos\alpha - y \sin\alpha + p$$

$$y' = \pm x \sin\alpha + y \cos\alpha + q,$$

која што ни определува, очигледно, едно конгруентно пресликување.

III. ПОИМ ЗА ГРУПА НА ПРЕСЛИКУВАЊА

Ако над која да е фигура A (мрежа на сл. 6) извршиме едно конгруентно присликување, тогаш таа фигура ќе се преслика во некоја друга фигура A'. Извршувајќи на таа фигура A' пак едно конгруентно пресликување, таа ќе се преслика во некоја фигура A''. Јасно е дека постои и такво конгруентно пресликување кое што A директно ја пресликува во A''. Исто така постои и такво конгруентно присликување кое што фигурата A' ја преслика во A.



Сл. 6

Слично е и при еквиформите пресликувања. И тука секогаш со едно само пресликување можеме секоја фигура да ја пресликаме во онаа фигура во која што би се пресликала таа, ако првин над неа би извршиле едно пресликување, а на пресликаната фигура пак некое (еквиформно) пресликување. Фотограф може на пр. некоја слика од формат 4 $\times$ 6 *cm* да ја увеличи на формат 6 $\times$ 9 *cm*, а оваа на формат 12 $\times$ 18 *cm* Но тој може и директно сликата од форматот 4 $\times$ 6 *cm* да ја увеличи на формат 12 $\times$ 18 *cm*.

Освен тоа и тука, при еквиформните пресликувања, кон секое пресликување постои и обратно пресликување, т.е. ако некое пресликување фигурата A ја пресликува во A', постои и такво пресликување, кое што A' ја пресликува во A. Фотограф може не само слика од формат 4×6 *cm* да ја увеличи на формат 6×9 *cm*, туку може и обратно, слика од формат 6×9 *cm* да ја намали на формат 4×6 *cm*.

Видовме дека множествата од сите можни конгруентни и сите можни еквиформни пресликувања имаат две карактерни особини. Имено дека:

(I) две кои да е пресликувања од некое од овие множества пресликувања, извршени едно по друго, дават секогаш пак едно пресликување од истото множество; и

(II) кон секое пресликување од секое од двата множества пресликувања постои и обратно пресликување.

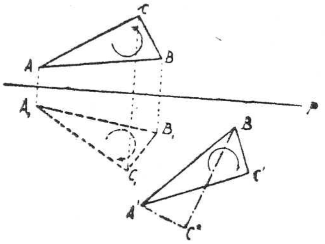
За секоја совкупност од какви и да е пресликувања, која ја задоволуваат овие два услови (I) и (II), викаме дека таа образува група пресликувања.

Според тоа, множеството од сите конгруентни пресликувања образува група пресликувања — конгруентна група, а исто така множеството од сите еквиформни пресликувања образува група — еквиформна група.

Погрешно би било да се мисли дека секое множество од бескрајно многу пресликувања образува група. Да го тоа покажеме на еден пример!

Едно множество од бескрајно многу пресликувања можеме да формираме на овој начин: при секое пресликување од ова множество нека се пресликаат сите точки од рамнината во точки, симетрични во однос на некоја права p од таа рамнина, а по тоа нека се изврши уште произволно „движење“ на тие точки во рамнината (но при тоа движење да нема никакво завртување на рамнината; види стр. 11). При едно вакво пресликување прејдува на др. триаголникот ABC во триаголникот $A'B'C'$, положајот на кој што се добива со предвижување на триаголникот $A_1 B_1 C_1$, симетричен со ABC во однос на p. (сл. 7). При тоа смислата во која што си следат темињата на некоја праволиниска фигура при секое вакво пресликување се менува (на цртежот означено со стрелка во какви смисли си следат темињата на двата триаголници): викаме дека при секое пресликување од овој вид се менува ориентацијата на секоја фигура.

Две спротивно ориентирани фигури, макар да се складни, општо, не можеме само со „слизгање“ на едната од нив по рамнината да ги доведеме во таков положај наполно да се поклопат. Така на пример $\triangle ABC$ може со „слизгање" да се доведе во положај ABC^*, но никако во положај $A'B'C'$.



Сл. 7

Извршувајќи над некоја фигура едно пресликување, а над пресликаната фигура уште едно, тогаш ориентацијата на фигурата ќе се мења два пати, значи, крајната слика е ориентирана онака како оригиналот. Затоа е јасно дека нема нито едно пресликување од нашето множество, кое што би дало ист резултат како што го даваат две пресликувања, извршени едно по друго, бидејќи спротивно ориентирани фигури не можат да се поклопат.

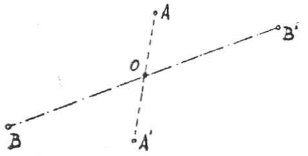
Нашите пресликувања не го задоволуваат условот (I) (види стр. 16), и следователно не образуваат група, иако се бескрајно многу.

Сега би можело да се помисли, дека штом некоја совкупност пресликувања образува група, ќе треба тоа множество да содржи бескрајно многу пресликувања. И тоа не е точно. Лесно можеме да определиме множество пресликувања што образуваат група, а да нивниот број не е бескраен. Еве еден пример!

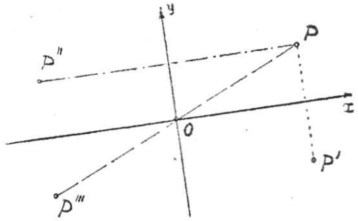
Едно пресликување од множеството што сакаме да го формираме нека пресликува секоја точка од рамнината во сама себе, т. е. нека ја оставува на мир. Втотото пресликување нека пресликува секоја точка A во точката A', нејзе централно симетрична во однос на некоја точка O (сл. 8). Совкупноста од овие две пресликувања ги задоволува барањата (I) и (II), па затоа образува група.

Некој пат дадена група пресликувања содржи во себе и друга група пресликувања. Може имено да се случи дека веќе еден дел од целокупниот број пресликувања што образуваат некоја група ги исполнува условите (I) и (II) и, значи, чини група.

Како пример нека ни послужи група пресликувања која се состои од овие четири пресликувања: од идентитет (пресликување што ја оставува секоја точка во мир); од пресликување што секоја точка P ја пресликува во точката P', симетрична со P во однос на x-оска на некоја правоагла координатна система; од пресликување што P ја пресликува во P'', симетрична со P во однос на y-оска на истата координатна система, и од пресликување што P ја пресликува во P''', центрично симетрична со P во однос на координатниот почеток O. Очигледно овие четири пресликувања образуваат група. Но група можеме да образуваме веќе со помал број



Сл. 8



Сл. 9

од овие пресликувања. Навистина, идентитетот и уште едно, кое да е од останатите три пресликувања, образуваат за себе група, бидејќи условите (I) и (II) за нив се исполнети, во кое што лесно се убедуваме. За овие групи од по две пресликувања викаме дека се **подгрупи** во дадената група.

Друг пример ни даваат еквиформната и конгруентната група. Бидејќи првата група ги содржува сите пресликувања од втората, јасно е дека конгруентната група е подгрупа во еквиформната група.

IV. ГЕОМЕТРИЈА ОД ДАДЕНА ГРУПА

Нека ни е дадена каква и да е група присликувања. Некоја фигура A ја пресликува која да е трансформација од групата во фигурата A'. И едната и другата фигура има некои геометриски особини. Некои од тие особини ќе се општи за двете фигури, а некои не. Ќе се ограничиме при иследувањето на овие две фигури само на оние нивни особини што им се заеднички, т. е. се ограничуваме на оние особини на фигурата A кои што при пресликувањето остануваат неизмеизменети, или, како што се изразуваме, инваријантни. Во тој случај фигурите A и A' не мораме да ги сметаме како битно различни, туку како еднакви, еквивалентни.

Општо, за некоја фигура A ќе викаме дека е еднаква или еквивалентна на некоја друга фигура A', ако во дадена група пресликувања постои такво пресликување, кое што A ја пресликува во A'.

И сега, следејќи го F. Klein, ќе ги викаме геометриски особини на некоја фигура такви особини на таа фигура кои што при некоја дадена група пресликувања се еднакви за сите еквивалентни фигури.

Зошто од множеството пресликувања што определуваат еден поим за еднакост (еквивалентност) на фигури требаше да бараме да образува група? Поради особината (II) (стр.16) следува имено: ако A е еквивалентен на A', тогаш е и A' еквивалентен на A; а поради особината (I) следува од еквивалентноста на A и A' и на A' и A'' истотака и еквивалентност на A и A''. Тоа се две битни особини, комутативност и транзитивност, што треба да ги има секој поим за еквивалентност. А овие две особини се исполнети само тогаш, кога множеството пресликувања ги задоволува горните два услова, т. е. ако множеството образува група.

Секоја група пресликувања образува свој поим за еквивалентност. Ако е дадена на пр. конгруентната група, тогаш произволни две конгруентни фигури се еквивалентни, без оглед на нивното положение во рамнината. При еквиформната група пресликувања пак се еднакви веќе две произволни *слични* фигури (пак, се разбира, без оглед на нивното положење во рамнината). Се гледа дека ако при една група пресликувања некои фигури се еквивалентни, тие не мора да се еквивалентни и при некоја друга група. (При еквиформната група како еднакви се сметаат на пр. *сите* квадрати, додека при конгруентната не сите, туку само оние што се конгруентни). Ако при некоја група дадена фигура има некоја определена особина, во друга не мора да ја има. Така за конгруентната група геометриска особина е на пр. *големината* на фигурите, а во еквиформната не.

Геометријата иследува геометриски особини на фигурите. Но поимот за геометриски особини определен е одвај кога е дадена некоја група пресликувања. Затоа секоја група пресликувања створува посебна гранка од геометријата, во извесна смисла и посебна геометрија. Што треба имено да разбираме под геометрија при дадена група пресликувања?

Под *„геометрија" ќе разбираме целата совкупност од сите поими, односи и теореми кои што при дадената група пресликувања остануваат неизменети, инваријантни.* Геометријата ги иследува само оние геометриски особини, поими и релации, што се дефинирани при дадената група. Затоа викаме поточно дека таа е *геометрија од дадената група.*

Разни групи пресликувања определуваат разни геометрии. Но одделни геометрии можат да бидат во извесна зависност меѓу себе, имено тогаш ако групите што ги определуваат геометриите се такви да некои од нив се подгрупи во други.

Ако во геометријата на подгрупа некоја фигура има определени геометриски особини, не мора да ги има и во геометријата на самата група. Оние пресликувања од групата што не ги содржи и подгрупата можат тие особини да ги менуат. Обратно пак, *секоја геометриска особина во геометријата на некоја група е и особина и во геометријата на која да е нејзина подгрупа.*

Наведнаш ни се наметнува прашањето кои се геометриите што ги определуваат групите со кои што се запознавме во глава II.

Пресликувањата на еквиформната група ги увеличуваат или намалуваат и ги пренесуваат на друго место фигурите во дадената рамнина. При тоа се запазуваат токму оние особини што ги иследува таканаречената *елементарна геометрија.* Неа не ја интересираат особините на една определена, индивидуална фигура, на пр. квадрат со определени димензии и во определено положење, туку такви особини на квадратот што ги имаат сите квадрати. А тоа се токму геометриските особини на квадратот во однос на еквиформната група. Кој да е квадрат може да послужи како репрезентант на класата од сите квадрати од рамнината. Во елементарната геометрија можеме, значи, слични фигури да ги сметаме како еквивалентни (а секоја од нив може да послужи како претставник за сите нејзе слични фигури). Спрема тоа:

Елементарната геометрија е геометрија на еквиформната група. Затоа често ја викаме и еквиформна геометрија.

Останува уште да одговориме на прашањето која геометрија ѝ припаѓа на конгруентната група.

Сите геометриски особини, поими и релации на еквиформната група се и особини, поими и релации и во геометријата на секоја нејзина подгрупа, значи и во конгруентната група. Освен овие особини, поими и релации кои геометриски особини, поими и релации ѝ припаѓаат уште на геометријата на конгруентната група? Очигледно само апсолутната големина на фигурите. Но, бидејќи обично на самото мерење во тесна смисла на зборот, т. е. на мерењето со еднаш за секогаш избрана единица мерка, му откажуваме геометриски интерес — вакви проблеми ги викаме, според F. Klein, не геометриски, туку геодетски — обикновено не зборуваме за „конгруентна геометрија“ [1]).

Интересно би било да се иследи сега, какви геометрии би добиле ако би зеле какви било групи пресликувања кои сите ја имаат еквиформната група како своја подгрупа.

Ние на кратко ќе се запознаеме со две такви групи пресликувања.

---

[1]) Некои, напротив, и мерењето во тесна смисла на зборот го сметаат како геометриска задача и, спрема тоа, под „елементарна геометрија“ тие ја разбираат геометријата на конгруентната група. Види на пр. Ефимов, Высшая Геометрия, Москва, Огиз, 1945, стр. 467).

што рамнината Ω' (сл. 10) ја сече во некоја права p'. Точките од p' се слики од точките на p. Затоа викаме дека правата p се преслика во правата p'.

(1) При афино пресликување секоја права се преслика во права.

Секое пресликување при кое што прави се пресликуваат во прави се вика колинеација.

2. Афиното пресликување е взаемно - еднозначно (види стр. 7). Навистина, на секоја точка A од Ω одговара една точка A' од Ω', а две различни точки од Ω имаат две различни слики на Ω' (претпоставуваме дека проицирните зраци не се паралелни со Ω).

(2) Афиното пресликување е взаемно-еднозначно колинеарно пресликување.

Може да се покаже и обратно, дека секое взаемно-еднозначно колинеарно пресликување е афино пресликување.

3. Да видиме како ќе се пресликаат две паралелни прави. Ако вакви прави p_1 и p_2 би се пресликале во две прави p'_1 и p'_2 што не се паралелни, тогаш нивниот пресек P би бил слика на две точки, едната од кои што би лежала на p_1, а другата на p_2. Но тоа поради (2) не е можно. Затоа:

(3) При афино пресликување се пресликуваат паралелни прави секогаш во паралелни прави.

4. Отсечката при афино проициране ја менува својата должина. Исто така се менува должината на отсечките и при еквиформното пресликување. Но тука, при сличносно пресликување, знаеме што станува со односот на кои да е отсечки: тој однос (следува од познатите теореми од сличноста) останува ист. При афино пресликување се менува, општо, дури и тој однос. Но ако отсечките се во специално положение, ако имено двете лежат на една права или се паралелни, тогаш и при афиното пресликување нивниот однос останува неизменет.

Тоа е непосредно јасно за отсечките од една и иста права. Поради $AA' \| BB' \| CC'$ (сл. 10) следува од теоремата за пропорционални отсечки дека

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

И доказот за случај на паралелни отсечки е лесен.

Оттука:

(4) Односот на две отсечки на една права или на две паралелни прави при афино пресликување останува неизменет.

Последица од оваа теорема е дека:

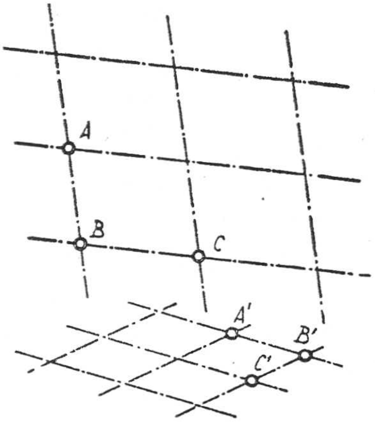
(4′) Еквидистантни точки (што лежат на една права) се пресликуваат во еквидистантни точки.

5. При конгруентното и еквиформното пресликување остануваше неизменет и аголот меѓу две прави. Каде афиното пресликување тоа веќе не е случај. Од определението на ова пресликување тоа е јасно: Ако пресечеме еден диедар (образуван од рамнините во кои што лежат проицирните зраци низ дадените две прави) со некоја рамнина (проекциска рамнина), тогаш аголот меѓу пресечните прави (афини слики на дадените две прави) се мења во зависност од положајот на рамнината. Како што се менува секој друг, така се менува и правиот агол при афино пресликување: при афино пресликување, општо, прав агол не се пресликува во прав агол.

Оттука следува дека секој квадрат при афино пресликување се пресликува поради (3) во паралелограм, а секој паралелограм пак во паралелограм. Затоа, поради (4′), афина слика на секоја паралелограмска мрежа (т. е. мрежа од конгруентни паралелограми) е пак некоја паралелограмска мрежа.

Поради тоа:

(5) Афиното пресликување можеме да го окарактеризираме како пресликување при кое што каква да е паралелограмска мрежа (значи и квадратна) се пресликува во парелограмска мрежа[1]).



Сл. 11

6. Едно конкретно афино пресликување е определено ако знаеме како ќе се пресликаат три произволни точки,

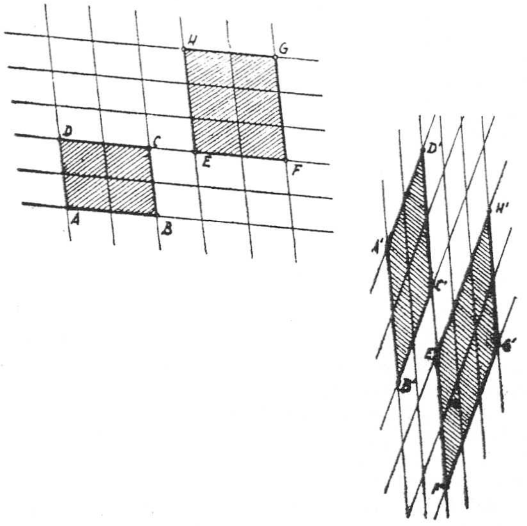
[1]) Знаејќи имено во каква мрежа се пресликува каква да е паралелограмска мрежа можеме, користејќи ги особините (3) и (4), да ја конструираме сликата P на која да е точка P.

што не лежат на една права. Три такви точки $A, B\,C$ определуваат имено преди пресликувањето една паралелограмска мрежа (сл. 11), а нивните слики A', B', C' ја определуваат паралелограмската мрежа по пресликувањето.

Значи:

(6) А ф и н о т о п р е с л и к у в а њ е е о п р е д е л е н о с о с л и к и т е о д т р и п р о и з в о л н и т о ч к и ш т о н е л е ж а т н а е д н а п р а в а.

7. Додека при конгруентното пресликување се запазува апсолутната големина и формата на фигурите, а при еквиформното пресликување само формата, тоа при афиното пресликување не се запазува ни големината, ни формата. (Квадрат преминува, на пр. во паралелограм).

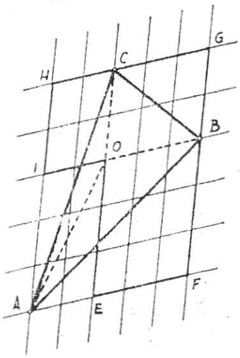


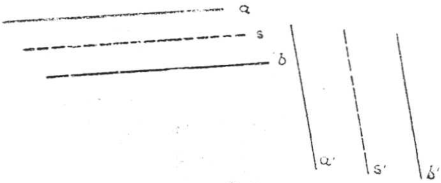
Сл. 12

Но сѐ пак при афиното пресликување се запазува една важна особина на фигурите. Сравнувајќи ги површините на фигурите $A\,B\,C\,D$ и $E\,F\,G\,H$ со површините на нивните слики $A'\,B'\,C'\,D'$ и $E'\,F'\,G'\,H'$ (сл. 12), веднаж ќе констатираме дека односот на првите две е равен на односот на вторите две. Треба само за единица мерка при првите две површини да ја земеме површината на еден паралелограм од оригиналната мрежа, а за вторите две површината од еден паралелограм на пресликаната мрежа (двата односи се 4 : 6). Истото важи, очигледно, и за сите фигури чии што страни лежат на мрежните линии (линии што ги образуваат мрежите). Оттука следува исто и за триаголниците чии што темиња лежат на мрежните точки (пресеците на мрежните линии).

Како што е покажано на сл. 13[2]) за секој таков триаголник можеме имено да конструираме таков полигон чии што страни лежат на мрежните линии, а кој што има два пати поголема површина од триаголникот. За такви полигони важи дека односот на нивните површини при афино пресликување не се менува, па, значи, важи и за нашите триаголници. Но бидејќи секој полигон може да се расече на триаголници, теоремата важи и за полигони со темињата на мрежните точки.

Се покажува дека горното важи и за површини, заградени со какви да е линии.





Сл. 14

Сл. 13

Тоа може да се покаже на следниот начин.

Даден пар мрежи кои што го определуваат пресликувањето можеме на известен начин да ги „згуствуваме". Ако имено две паралелни прави a и b се пресликаат во прави a и b′, тогаш и правата s, паралелна со a (и b) и на еднакво растојание од a и b, ќе се пресликa поради (3) и (4) (стр. 23) во правата s′, паралелна со a′ и b′ и на еднакво растојание од нив (сл. 14). Приложувајќи ја оваа теорема на дадените мрежи доволен број пати, можеме мрежите да ги „згустиме" така да растојанието меѓу секои две соседни паралелни мрежни линии биде произволно мало. (Види сл. 15).

Со доволно згуствување на мрежите можат темињата на каков да е полигон да дојдат на мрежните точки на „згустените"

---

[2]) бидејќи површ. на $\triangle\ OBC = \frac{1}{2}$ од површ. на $OBGC$,

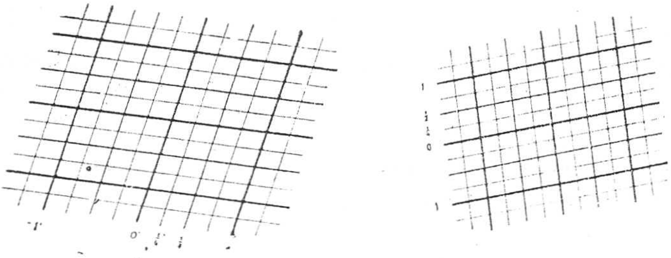
површ. на $\triangle\ OBA = \frac{1}{2}$ од површ. на $OEFB$ и

површ. на $\triangle\ OCA = \frac{1}{2}$ од површ. на $OCHI$,

тоа површ. на

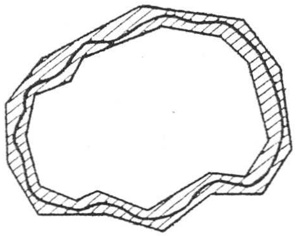
$$\triangle\ ABC = \frac{1}{2} \text{ од површ. на } OEFGHIO.$$

мрежи или произволно близу од нив. Затоа теоремата важи и за какви да е полигони.



Сл. 15

Теоремата важи и за криволиниски фигури, бидејќи контурите на такви фигури можеме да ги „затвориме" меѓу две затворени полигонални линии, и тоа така да разликата од површините на полигоните, определени со овие полигонални линии, биде толку мала колку што сакаме (сл. 16).



Сл. 16

Спрема тоа важи следната теорема:

(7) При секое афино пресликување односот на површините од две фигури останува неизменет.

2 Аналитичка дефинација на афино пресликување

Едно афино пресликување е определено ако знаеме како се пресликува каква да е паралелограмска мрежа (особина (5), стр. 24). Тоа е определено, значи, и тогаш кога знаеме како ќе се преслика дадена квадратна мрежа. Ова нешто можеме да го исползуваме за добивање на релациите што постоат меѓу координатите на која да е точка од рамнината пред и след пресликувањето (во некоја дадена координатна система.)

Се покажува дека точката со координатите x и y по извршувањето на кое да е афино пресликување прејдува во точка чии што координати x' и y' се пресметуваат со помошта на равенките

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= Ax + By + C \\ y' &= A_1x + B_1y + C_1, \end{aligned}$$

каде што $AB_1 - A_1B \neq 0$.

Ако се изврши над точките од една рамнина едно афино пресликување, тогаш меѓу координатите x, y (во некоја координатна система во таа рамнина) на која да е точка пред пресликувањето и координатите x', y' на сликата од таа точка постои релацијата (1). Но точно е и обратно, секое пресликување, дефинирано со равенките (1), е афино.

Дека овие тврдења се точни би можеле да покажеме на овој начин

Нека ни е дадено едно афино пресликување. Тогаш знаеме (види (5), стр. 24) во каква мрежа ќе се преслика некоја дадена квадратна мрежа во рамнината во која што станува пресликувањето. Во таа рамнина избираме таква координатна система за да ги имаат мрежните линии од дадената квадратна мрежа во однос на таа координатна система равенките:

$$(2) \qquad x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots ; \; y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Сликите на правите $x = o$ и $y = o$ нека имаат равенки респективно:

$$ax' + by' + c = o \text{ и } a_1x' + b_1y' + c_1 = 0,$$

каде што константите a, b, c, a_1 b_1, c_1 се познати. Правите $x = 1$ и $y = 1$ ќе се пресликаат во прави, паралелни респ. на правите (2), значи во

$$ax' + by' + c - к = o \text{ и } a_1x' + b_1y' + c_1 - к_1 = 0,$$

каде што константите $к$ и $к_1$ ги знаеме (бидејќи знаеме како се пресликува дадената мрежа).

Правите $x = x_1$ и $y = y_1$ се пресликуваат, бидејќи паралелни и еквидистантни прави прејдуваат пак во паралелни и еквидистантни прави, респективно во правите:

$$(3) \qquad ax' + by' + c - x_1к = 0 \text{ и } a_1x' + b_1y' + c_1 - y_1к = 0 \cdot$$

Положајот на точката $P(x_1, y_1)$ е даден со пресекот на правите $x_1 = x$ и $y = y_1$. Но овие прави се пресликуваат во правите (3), нивниот пресек P' е затоа слика од P при ова наше пресликување. Координатите x' и y' на точката P' се решенијата на системата (3), имено:

$$(4) \qquad \begin{aligned} x' &= Ax_1 + By_1 + C \\ y' &= A_1x_1 + B_1y_1 + C_1, \end{aligned}$$

каде што

$$A = \frac{b_1 к}{\triangle}, \quad B = -\frac{bк_1}{\triangle}, \quad C = \frac{bc_1 - cb_1}{\triangle},$$

$$A_1 = -\frac{a_1 к}{\triangle}, \quad B_1 = \frac{aк_1}{\triangle}, \quad C_1 = \frac{a_1c - ac_1}{\triangle}$$

и

$$\triangle = ab_1 - a_1 b$$

За да системата (3) има решење треба да е $\Delta \neq 0$. Но поради $AB_1 - A_1B = kk_1(ab_1 - a_1b)$ и $kk_1 \neq 0$[3]), треба и $AB_1 - A_1B \neq 0$.

Испуштајќи ги индексите при x_1 и y_1 во равенките (4), ги добиваме токму релациите (1).

Секое афино пресликување на точки од една рамнина аналитички се репрезентира со равенките (1). Важи и обратно: секое пресликување, определено со равенките (1), е афино. Во тоа се убедуваме веднаж, проследувајќи го горното изведување во обратен правец.

3. Група афини пресликувања. Афина геометрија.

Над точките на една дадена рамнина можеме да извршиме едно или повеќе афини пресликувања. Настанува прашање да ли можеме да избереме доволен број вакви пресликувања, за да образуваат група.

Сите општо можни афини пресликувања на точки од една рамнина се сигурно веќе едно такво множество пресликувања. Ако имено некое пресликување три точки *A*, *B*, *C* ги пресликува во *A*,′ *B*,′ *C*,′ а кое да е друго пресликување овие последни ги пресликува во *A*,″ *B*,″ *C*″, тогаш постои и такво пресликување кое што *A* *B*, *C* ги пресликува во *A*,″ *B*,″ *C*″, оти во нашето множество се сите можни пресликувања. Поради истата причина постои кон секое пресликување кое што точките *A*, *B*, *C* ги преслика во *A*,′ *B*,′ *C*′ и пресликување кое што точките *A*,′ *B*,′ *C*′ ги преслика во *A*, *B*, *C*. Со тоа условите (I) и (II) (стр. 16) се исполнети, и нашето множество образува, значи, навистина група пресликувања. Оваа група ја викаме афина група.

Секоја квадратна мрежа е специјален случај од паралелограмска мрежа. Затоа е секое еквиформно, а спрема тоа и секое конгруентно пресликување, и афино. Сите еквиформни пресликувања влегуваат во множеството на сите афини пресликувања — во афина група. Значи, еквиформната група е подгрупа во афината група.

Гранката на геометријата што ѝ припаѓа на афина група ја викаме афина геометрија.

Афина геометрија иследува оние особини на фигурите што остануваат неизменети при групата афини пресликувања (види стр. 20). Тоа не се сите особини и поими што ги срекаваме во еквиформната геометрија, бидејќи еквиформната

---

[3]) При пресликувањата, дефинирани на наш начин (стр. 22), овој услов секогаш е исполнет. $kk_1 \neq 0$ значи дека нито едната, нито другата фамилија паралелни прави од дадената мрежа не се сливаат во една права, а условот $ab_1 - a_1b \neq 0$ значи геометрично дека правите од едната од тие фамилии не се паралелни со правите од другата фамилија.

група е подгрупа во афината група (види стр. 20). Така на пр. во афината геометрија не може да се зборува за нормални прави, бидејќи тие, општо, се пресликуваат во ненормални. Поим за нормалност во афина геометрија не постои. Поради тоа во афина геометрија не спаѓаат сите оние теореми, поими и релации што се во врска со поимот за нормалноста. Од друга страна, за паралелни прави може да се зборува и во афината геометрија, бидејќи паралелни прави при секое афино пресликување преј[д]уваат пак во паралелни прави. (стр. 23, особина (3)). Како во еквиформната така и во афината геометрија постои поимот за паралелност.

Во еквиформната геометрија не можевме да зборуваме за апсолутната големина на некоја фигура, толку помалку можеме за тоа да зборуваме во афината геометрија. Во еквиформната геометрија сите слични фигури се сметаат како еквивалентни, но во афината геометрија поимот за сличност веќе не постои. Афината група определува свој поим за еквивалелнтност на фигурите (стр. 19). Во неа не само сите слични фигури се сметаат како еднакви, туку сите фигури што стануваат од една дадена фигура при секое пресликување од афината група.

Така на пр. додека во еквиформната геометрија разликуваме бескрајно многу различни триаголиици, тоа во афината геометрија не правиме разлика меѓу разни видои триаголници; сите воопште можни триаголници од дадената рамнина се еквивалентни (бидејќи кои да е три неколинеарни точки можат афино да се пресликаат во кои да е други три дадени неколинеарни точки).

Еве и друг пример. Во еквиформната геометрија како еднакви се сметаат сите квадрати, сите слични правоаголници, сите слични ромбоиди, сите слични ромбои, а во афината геометрија веќе не правиме разлика меѓу квадрат, правоаголник, ромб, и ромбоид, туку сите овие фигури за нас се еквивалентни (се интересуваме само за оние нивни особини што им се општи на сите нив; види стр. 19). Затоа на сите овие фигури им даваме и заедничко име — паралелограм.

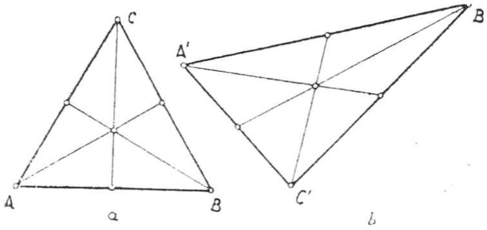
Подолу ќе илустрираме со низа примери какви прашања третира афината геометрија.

5. Практично исползување на афини пресликувања

Пресликувањата во геометријата немаат само теоретски интерес. Нив често ги приложуваме и за практички цели. Во прв ред можеме да ги исползуваме за наоѓање нови, поопшти теореми, ако ни се познати теоремите што важат во поспециален случај. Ќе појасниме тоа на неколку примери.

1. пример.

Сметајќи ја како позната теоремата дека во рамностран триаголник висините се сечат во една точка која што секоја висина ја дели во однос 1 : 2, наведнаж можеме да добиеме нова, поопшта теорема. Ако имено фигурата од сл. 17 *a* ја пресликаме афино, ќе ја добиеме фигурата од сл. 17 *b*. Темињата на триаголникот ќе се пресликаат во темињата на друг триаголник, страните ќе се пресликаат во страни, а висините (кои што едновремено се и тежишни линиии) ќе се пресликаат во тежишни линии (бидејќи средината од дадената отсечка се пресликува во средината на пресликаната отсечка; види стр. 23). При пресликувањето односот на две отсечки од иста права не се менува (стр. 23), затоа:



Сл. 17

Тежишните линии во секој триаголник се сечат во една точка и таа ја дели секоја од нив во односот 1: 2.

Од специална теорема (која се односува за тежишни линии во рамностран триаголник) добивме поопшта (која се односува са секој триаголник). Втората теорема спаѓа во афина геометрија (во еквиформната спаѓаат, се разбира, двете).

2. пример.

Во еквиформна геометрија не правиме разлика меѓу разни кругови (сите се слични меѓу себе). Во афина геометрија дури не правиме разлика веќе ни меѓу кругои и елипси Сите кругои и елипси се еквивалентни, бидејќи секоја елипса може да се преслика при некое афино пресликување во круг. Навистина: Произволно дадена елипса во рамнината има во однос на една правоагла координатна система равенка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Пресликувањето, дефинирано со равенките

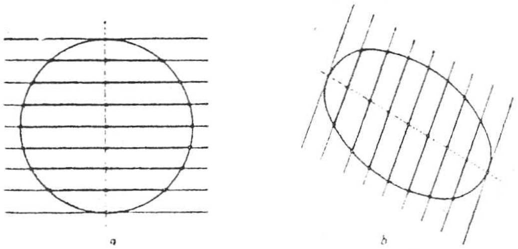
$$x' = \frac{x}{a} \; ; \; y' = \frac{y}{b} \; , \tag{5}$$

кои што се од типот (1), стр. 28, елипсата ја пресликува во

$$x'^2 + y'^2 = 1 \quad ,$$

т. е. во круг. Со тоа е докажана еквивалентноста на сите кругови и елипси. Од равенките (5) следува дека центарот на кругот се пресликува во центарот на елипсата. Центарот на една елипса е, значи, афин поим. Исто така секоја права што мине низ центарот на еден круг преминува во права што мине низ центарот на една елипса — пречник се пресликува во пречник. Значи, и пречникот на една елипса е афин поим.

За илустрација наведуваме неколку афини особини на елипси.



Сл. 18

1) Фигурата од сл. 18*a* — кружната линија, еден пречник и тетиви нормални на тој пречник — ја пресликуваме афино: ја добиваме фигурата од сл. 18 *b*. Кружната линија преминува во елипса, паралелните тетиви во паралелни тетивие, средините на тетивите во средини на пресликаните тетиви. Средините на круговите тетиви лежеа пред пресликувањето на еден пречник, затоа лежат и нивните слики на еден пречник. Оттука оваа теорема на афината геометрија:

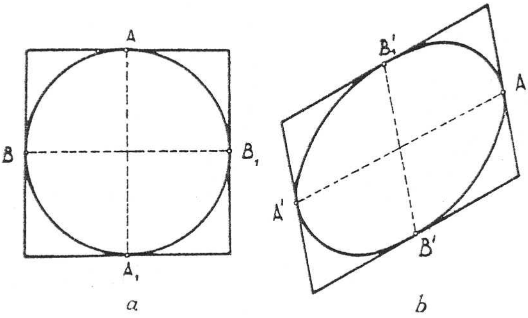
Средините на паралелните тетиви на секоја елипса лежат на една права — пречник на таа елипса.

2) Во еден круг (сл. 19*a*) нацртани се два нормални пречници AA_1 и BB_1. Во нивните крајни точки повлечени се тангенти, кои што образуваат еден квадрат. След некое афино пресликување на оваа фигура, нормалните пречници преминуваат во два пречника — коњугирани пречници — на сликата на кругот, а квадратот во паралелограм чии што страни се паралелни со тие два коњугирани пречници[4]). Ако опишеме на кругот два кои да е квадрати, тие имаат

[4]) Според горното, коњугиран пречник кон даден пречник на некоја елипса е оној нејзин пречник кој што е паралелен со тангентите на елипсата во крајните точки на дадениот пречник.

еднакви површини, нивниот однос е, значи, 1. При пресликувањето тој однос не се менува. Затоа важи оваа терема на афината геометрија:

Површините на сите паралелограми, опишани околу некоја елипса, чии што страни се паралелни со взаемно коњугурани пречници од таа елипса, се еднакви. (еднакви на $4ab$; $2a$ и $2b$ се мерните броеви од должините на главните оски.)



Сл. 19

Односот на површините на круг и кој да е нему опишан квадрат е $\frac{4r^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi}$ (r е радиус на кругот). Тој однос не се менува при пресликувањето. Спрема тоа е

$$\frac{4}{\pi} = \frac{P_1}{P},$$

каде што P_1 е површината на кој да е паралелограм во кој се пресликува квадратот — значи $P_1 = 4ab$ —, а P површината на елипсата. Оттука

$$\frac{4}{\pi} = \frac{4ab}{P}$$

и површина на елипса:

$$P = \pi ab.$$

Од формулата за површината на кругот добиваме формулата за поврвнината на елипси. За сите кругови и елипси добивме иста формула за површина (за круг ако $a = b$), што е разбирливо оти сите овие фигури афино се еквивалентни.