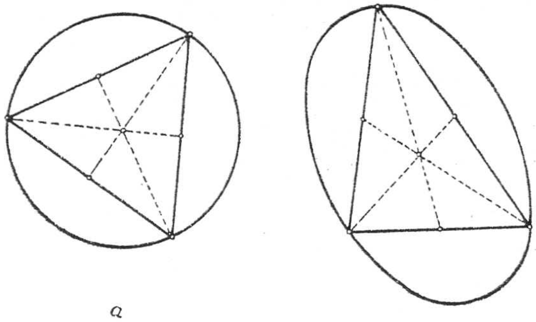
3) Тежиштата на сите рамнострани триаголници, впишани во даден круг, совпаднуваат со центарот на тој круг (сл. 20a). Лесно се докажува и обратно, дека секој триаголник, впишан во круг, е рамностран. Ако во елипсата на сл. 20b впишеме каков да е триаголник на кој што тежиштето му е во центарот на елипсата, и над добивената фигура извршиме кое да е такво афино пресликување кое што елипсата ја пресликува во круг, тогаш тој триаголник ќе се преслика во



a

Сл. 20 b

рамностран триаголник, впишан во тој круг. Навистина, тежиште на секој триаголник се пресликува при афино пресликување во тежиштето на пресликаниот триаголник. Според тоа, во нашиот случај, тежиштето на пресликаниот триаголник е во центарот на кругот, а такви триаголници се рамнострани. Односот на површините на кои да е два впишани рамнострани триаголници во дадениот круг е 1, затоа е таков и односот на површините на нивните слики, односно на фигурите чии што афини слики се тие самите. На тој начин ја добиваме оваа теорема, што ѝ припаѓа на афината геометрија:

Сите триаголници впишани во елипса, на кои што тежиштата им се во нејзиниот центар, имаат еднакви површини.

4) На еден круг (сл. 21a) повлекуваме две паралелни тангентни t_1 и t_2 кои што го допираат кругот во крајните точки на пречникот AC, и, освен тоа, уште една произволна тангентна t која што кругот го допира во некоја точка F. SE нека е полупречник на кругот, паралелен со тангентите во A и C. Четириаголниците $ABFS$ и $SFDC$ се слични, затоа

$$AB : AS = SC : CD$$

и, поради $AS = SC = SE$,

$$AB : SE = SE : CD. \tag{6}$$

Афина слика од фигурата на сл. 21a е дадена на сл. 21b. При тоа односот на паралелни отсечки не се менува:

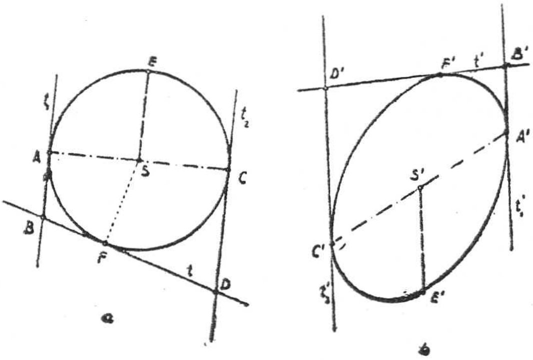
$$AB : SE = A'B' : S'E' \ , \ SE : CD = S'E' : C'D'$$

и, поради (6),

$$A'B' : S'E' = S'E' : C'D' \ ,$$

или

(7) $$A'B' . C'D' = S'E'^2$$

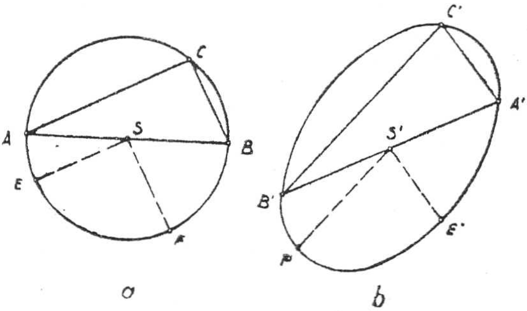


Сл. 21

Десната страна на (7) не зависи од тоа каков положај има тангентата t, ако тангентите t_1 и t_2 се фиксни. Покажавме дека:

Подвижна танѓента на една елипса отсекува на две произволни паралелни тангенти отсечки со константен производ, равен на квадратот од полупречникот на елипсата, паралелен со паралелните тангенти.

5) Круг, опишан околу секој правоаголен триаголник, има центар во средината на неговата хипотенуза. Земајќи го



Сл. 22

радиусот на тој круг како единица мерка сл. (22a), Питагоровата теорема може да се напише во вид:

$$(8) \qquad \left(\frac{AC}{SE}\right)^2 + \left(\frac{CB}{SF}\right)^2 = \left(\frac{AB}{SA}\right)^2,$$

каде што SE и SF се полупречници, паралелни со катетите на триаголникот.

Фигурата од сл. 22*a* след афино пресликување преминува во фигурата, дадена на сл. 22*b*. При тоа односите на паралелни отсечки не се менуваат, затоа пак важи:

$$(9) \qquad \left(\frac{A'C'}{S'E'}\right)^2 + \left(\frac{C'B'}{S'F'}\right)^2 = \left(\frac{A'B'}{S'A'}\right)^2$$

Релацијата (8) важи за секој положај на точката C на кружната линија, затоа и (9) важи за секој положај на точката C' на елипсата. Релацијата важи за секоја елипса, бидејќи при секое такво афино пресликување што таа елипса ја пресликува во круг, впишаниот триаголник се пресликува во правоаглен триаголник.

Така ја докажавме „афината Питагорова теорема“:

При секој триаголник, впишан во елипса[5]), кај кој што едната страна е пречник на елипсата, квадратот на таа страна равен е на збирот од квадратите на другите две страни, ако секоја страна на триаголникот се мери со нејзе паралелниот полупречник.

6) На аналоген начин како што во горниот пример ја обопштивме „еквиформната“ Питагорова теорема во „афина“, можеме да го обопштиме и ставот за степен во однос на круг — ако имено отсечките ги мериме со оние радиуси на кругот што се паралелни на тие отсечки (сл. 23*a*). Од познатата теорема за степен во однос на круг следува — пресликувајќи ја афино фигурата од сл. 23*a* — наведнаж аналогна теорема за елипса, само со таа разлика што секоја отсечка треба да се мери со нејзе паралелниот полупречник на елипсата (сл. 23*b*). Така на пр.

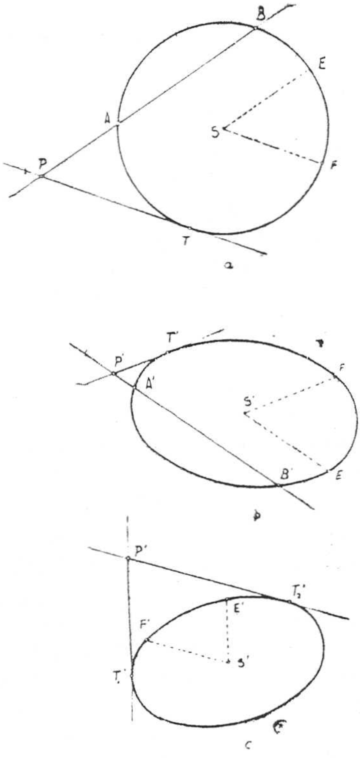
$$\frac{P'A'}{S'E'} \cdot \frac{P'B'}{S'E'} = \left(\frac{P'T'}{S'F'}\right)^2$$

и, специално (сл. 23*c*):

$$\frac{P'T_1'}{S'E'} = \frac{P'T_2'}{S'F'}$$

---

[5]) Истото важи и за хиперболата (Се докажува аналитички. Види на пр. L. Hefter u. C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Karlsruhe, Braun, 1927 (стр. 309 и сл.).



Сл. 23

3. пример.

Во примерот 2. видовме како афини пресликувања можат со успех да се исползуваат за наоѓање на сите оние особини што им се општи на сите елипси — нивните афини особини.

И особините на една друга важна крива, хиперболата, можеме да ги иследиме со помошта на афини пресликувања.

Особини, заеднички на сите хиперболи, се токму афини особини на хиперболите, бидејќи сите можат афино да се пресликаат во една хипербола. Навистина, произволна хипербола, преместена првин во рамнината така да нејзината равенка во однос на дадената координатна система гласи

$$(10) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

след афиното пресликување

$$x' = \frac{x}{a}, \; y' = \frac{y}{b}$$

преминува во една и иста хипербола, имено во хиперболата:

$$x'^2 - y'^2 = 1.$$

Афините особини на хиперболите можеме да ги добиеме на овој интересен начин. Од групата афини пресликувања ќе ги избереме само оние пресликувања, кои што точките од една хипербола, на пр. од (10), ги пресликуваат пак во точките од истата хипербола. Се покажува дека такви пресликувања има бескрајно многу, и дека секогаш може да се најде меѓу нив такво пресликување кое што призволната хиперболина точка ја пресликува во која да е точка од истата хипербола. При секое вакво пресликување асимптотите се пресликуваат во асимптоти.[6])

Овие пресликувања ни овозможуваат брзо пронајдување на особините на хиперболите. Наведуваме неколку примери.

1) Тетивите што се нормални на која да е од главните оски на некоја хипербола (сл. 24), се паралелни, а нивните средини лежат на таа оска. При секое пресликување од горен вид паралелни прави преминуваат во паралелни тетиви од истата хипербола. Средините на тетивите пред пресликувањето лежеа на еден пречник (права низ пресекот на асимптотите), затоа лежат тие и по секое горно пресликување пак на некој пречник (сликата на правата на која што лежат средините на тетивите мора и по пресликувањето да врви низ пресекот на асимптотите, бидејќи тој при сите пре-

---

[6]) Споменатите пресликувања можеме да ги определиме на овој начин. Во равенките (1) треба коефициентите да ги бираме така да важи

$$x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2$$

или

$$(x + y)(x - y) = (x' + y')(x' - y').$$

Овој услов е исполнет ако при секој $\lambda \neq 0$ важи:

$$x + y = \lambda(x' \pm y')$$

$$x - y = \frac{1}{\lambda}(x' \mp y')$$

или

$$(11) \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{\lambda^2+1}{2\lambda}x - \frac{\lambda^2-1}{2\lambda}y \\ y' &= \pm\frac{\lambda^2-1}{2\lambda}x \pm \frac{\lambda^2+1}{2\lambda}y \end{aligned}$$

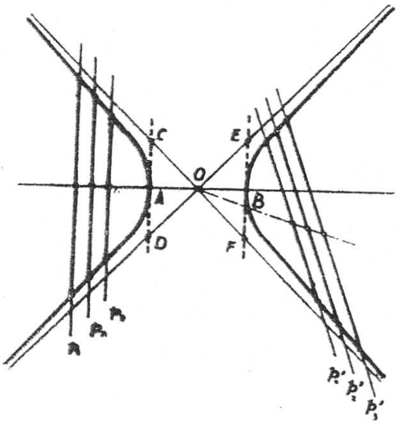
Равенките (11) определуваат за секој λ по едно пресликување кое што хиперболата:

$$x^2 - y^2 = 1$$

ја пресликува во себе. Лесно се верифицира дека и асимптотите на оваа хирербола се пресликуваат во себе.

сликувања останува на место како пресек на прави што се пресликуваат во себе). Така и тука важи аналогната теорема што важи за елипсата:

Средините на тетивите при секоја хипербола лежат на една права, еден пречник на хиперболата.



Сл. 24

2) Секоја тангента на хиперболата при секое горно пресликување преминува во тангента (како права која што со хиперболата има една општа точка). Пречникот AB (сл. 24) при пресликувањето може да премине во кој да е пречник што има пресеци со хиперболата.
Оттука:

Тангентите на хиперболата во пресечните точки на секој пречник со хиперболата секогаш се паралелни, бидејќи се паралелни преди пресликувањето ($CD \parallel EF$).

3) Бидејќи точката A (сл. 24) е во средината на отсечката CD, а тангентата CD може афино да се пресlика во која да е друга тангента, важи:

Допирната точка на секоја тангента на хиперболата лежи во средината на отсечката што од неа ја отсекуваат асимптотите.

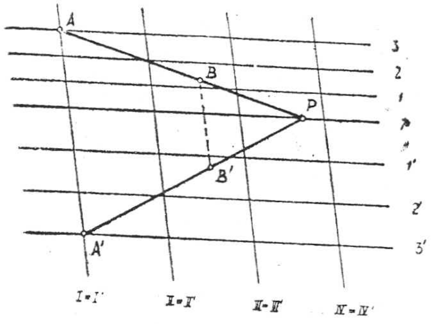
На сосем сличен начин се покажува, а тоа оставаме да го стори читателот, дека на секоја тетива асимптотите и хиперболата отсекуваат еднакви отсечки.

Со овие три примери покажавме како можат афини пресликувања да се користат за најдување нови теореми: за пронајдување афини особини на фигурите.[7]). Но нивното

[7]) На убав начин е применет овој начин на пр. во книгата П. С. Моденов.- Г. Л. Невяжский, Курс высшей математики, глава II — VIII, Москва. Огиз, 1948.

практично значење не е единствено во тоа. Сакаме да укажеме на уште една нивна примена: имено како нив можеме да ги исползуваме и за решавање на конструктивни задачи.

Како пример ќе разгледаме една специална афинитета, дефинирана на овој начин. Некоја дадена афина мрежа[8]) нека се преслика во друга афина мрежа, така да едната фамилија од мрежните линии преминува во себе, а од другата фамилија паралелни мрежни линии само едната да се пресликува во себе. На тој начин дадената мрежа се пресликува онака како што е покажано на сл. 25. Правите I, II, III, . . . преминуваат во себе, правата p преминува во себе, а правите 1, 2, 3, ... се пресликуваат во правите 1′, 2′, 3′, . . .



Сл. 25

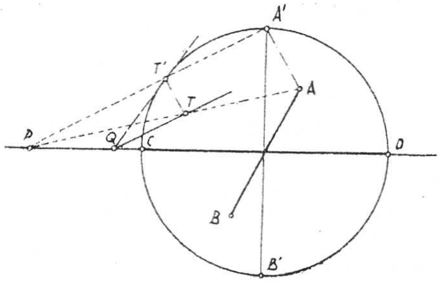
Вакво пресликување е определено ако е дадена фиксната права p и сликата A' на која де а точка A. Сликата B' на секоја друга точка B ја добиваме на тој начин што ја бараме сликата на правата AB. Секоја точка од p е пресек на две прави што се пресликуваат во себе, затоа секоја нејзина точка при пресликувањето останува на местото. Спрема тоа пресекот P на правите AB и p лежи и на сликата од правата AB, затоа бараната слика е правата PA'. Сликата B' од B треба да лежи ем на неа ем на мрежната линија низ B која што се пресликува во себе. Оттука следува следната конструкција на B': Низ точките A и B треба да повлечеме права до пресекот P со p. Точката B' е пресек на правата PA' и правата низ B, паралелна со AA'.

Со помошта на оваа афинитета можеме да решиме разни конструтивни задачи. Ние ќе спомeнеме само еден пример.

Ако е дадена елипса со еден пар свои конјугурани пречници (AB, CD на сл. 26) можеме лесно, користејќи ја горната афинитета, да конструираме произволно многу точки и тангенти на таа елипса. Еден од дадените конјугирани преч-

[8]) т. е. паралелограмска мрежа.

ници го избираме за правата p од горното пресликување. Тој пречник (CD на сл. 26), бидејќи лежи на правата чии што точки при пресликувањето се пресликуваат во себе, ќе остане при секое пресликување на место. Самата елипса преминува пак во елипса или круг. Ќе го определиме токму она пресликување (од горен вид) кое што оваа елипса ќе ја преслика во круг. Конјугирани пречници преидуваат при тоа пресли-



Сл. 26

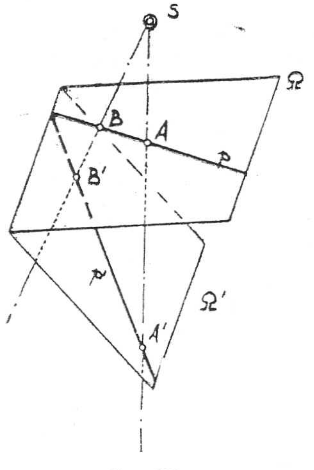
кување во нормални пречници. Бидејќи пречникот CD останува на место, пречникот AB ќе се преслика во $A'\,B'$, нормален на AB. Сега нашата афинитета веќе е определена: освен правата p имаме и еден пар соодветни точки A и A' (или A и B'). Конструкцијата сега е евидентна: над конјугираниот пречник CD опишуваме круг (CD да му е пречник), на него избираме произволна точка T' и го бараме нејзиниот оригинал T кој што е една точка од елипсата. Тангентата на елипсата во T е правата TQ (сл. 26), бидејќи секоја тангента преминува во тангента, а сликата на TQ е TQ'.

VI. ПРОЕКТИВНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

1. Определение и некои карактерни особини

На кратко ќе се осврнеме уште на едно важно пресликување.

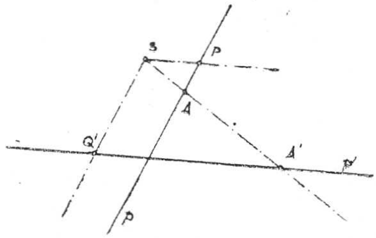
Обопштувајќи го проицирањето што не доведе до еквиформното пресликување во толку што рамнините Ω и Ω' (сл. 4, стр. 10) да имаат произволен взаемен положај (сл. 27), добиваме ново, проективно, пресликување на точките од една рамниа (Ω) во точките од друга рамнина (Ω').



Сл. 27

Очигледно ова пресликување е колинеарно: секоја права се пресликува пак во права (на пр. правата p во правата p' на сл. 27). Но за разлика од досега изучените пресликувања, при кои што на секоја точка од едната рамнина ѝ одговара по една точка од другата рамнина, при сега дефинираното проективно пресликување постоат и такви точки во дадената рамнина што немаат свои слики. Навистина, посматрајќи ја рамнината во која што лежат правите p и p' од сл. 27 (самата рамнина дадена е на црт. 28), гледаме дека секоја точка A од p има слика A' на p', со исклучение на едната — точката P — која што нема своја слика на p', и дека постои една точка од правата p' — точката Q' — која што нема свој оригинал на p.[1])

За да го избегнеме овој „недостаток", за да не би имале во рамнината точки што прават исклучение, се договоруваме дека на секоја права p од таа рамнина ѝ додаваме по една фиктивна точка — нејзината „небитна" точка, за разлика од другите, „битните" точки — чија што слика е онаа точка на p' (т. е. на сликата од p) што го немаше својот оригинал на p (точката Q' на сл. 28). Аналогно ја дополнуваме и сликата p' од p со една небитна точка. На ваков начин дополнети прави се викаат проективни прави. За вакви прави сега важи:



Сл. 28

Секоја точка од дадена проективна права при проективно пресликување преминува во една точка од друга проективна права — сликата од првата.

При проективни пресликувања паралелни прави, општо, не се пресликуваат во паралелни прави, како што тоа беше случај при сите досега споменати преслекувања. На сл. 29 е покажано како се пресликуваат три паралелни прави p_1, p_2, p_3. Нивните слики p'_1, p'_2 и p'_3 се пресеците на рамнината Ω' со рамнините, определени со респективно p_1 и S, p_2 и S, p_3 и S — т. е. рамнините во кои што лежат проицирните зраци низ точките од p_1, p_2 и p_3, Овие рамнини се сечат во правата $SS' \parallel \Omega$, а пресекот S' на таа права со Ω' е и пресек на правите p'_1 p'_2 и p'_3.

Паралелни прави се пресликуваат, спрема тоа, општо, во прамен прави [2]).

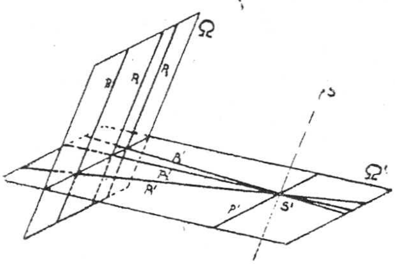
Точката S' (сл. 29) е слика на небитната точка и од p_1, и од p_2, и од p_3. За да не би различни точки (небитни точки од разни паралелни прави) имале иста точка како своја слика, нужно е на паралелните прави да им „претпи-

[1]) На сл. 28 е $SP \parallel p'$ и $SQ' \parallel p$.

[2]) т. е. прави што врват низ една точка.

шеме“ иста небитна точка[3]). Небитна точка на некоја права определена е, значи, веќе со нејзиниот смер.

При произволно положение на паралелните прави p_1, p_2, p_3 во Ω (сл. 29) SS' секогаш е паралелна со Ω. Затоа геометриско место на пресеците на таа права со Ω' е правата p' ($\| \Omega$). Оваа права е геометриско место на сликите од сите можни небитни точки од рамнината Ω. За да важи теоремата дека „права при проективно пресликување секо-



Сл. 29

гаш се пресликува во права“ и во овој случај, треба од порано воведените небитни точки да бараме да лежат на една права. Затоа рамнината ја дополнуваме со една фиктивна права, права која што ги содржува сите небитни точки од таа рамнина, — „небитна“ права, за разлика од другите, „битните“. Ваква дополнета рамнина се вика проективна рамнина. Во неа сите точки и прави, битните и небитните, наполно се рамноправни.

Во проективна рамнина теоремата „дека две прави имаат секогаш една и само една општа точка“ важи неограничено. Паралелни прави имаат една општа точка (небитната), затоа се само специален прамен прави. Во неа секоја права при проективно пресликување преминува пак во права, а две различни точки имаат две различни слики. Поради тоа проективното пресликување можеме вака да го определиме:

Проктивно пресликување на точките од проективна рамнина[4]) е обратно-еднозначна колинеација.

Да спомeнеме сега некои важни особини на проективни пресликувања. Од горе изложеното е јасно дека:

---

[3]) Оваа точка често погрешно се вика „бескрајно оддалечена точка“. Види на пр. H. Beck, Elementargeometrie Bd. II, S. 19 — 21, Leipzig, 1930.

[4]) Се мисли на проективно пресликување на точките од една проективна рамнина во точките од друга проективна рамнина, или на точките од една проективна рамнина во точките на истата проективна рамнина.

(1) Прамен прави при проективно пресликување преминува во прамен прави.

Кога веќе знаеме дека прави како целини се пресликуваат во прави, важно е сега да се знае како се пресликуваат отсечки на некоја права. Додека при афини пресликувања еднакви отсечки од една права се пресликуваат во еднакви отсечки, тоа тука веќе не е случај. При проективно пресликување еквидистантни точки не се пресликуваат, општо, во еквидистантни точки. Односот на две отсечки од една права при проективно пресликување, значи, се мења. Но пресметувањето покажува дека тука односот на два такви односи не се менува. Четири точки A, B, C и D од една права ги определуваат односите $\frac{CA}{CA}$ и $\frac{DA}{DB}$, чиј што однос

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

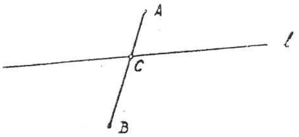
таканаречениот „двоен однос“ на четирите точки A, B, C и D (во овој ред), значи, при пресликувањето останува неизменет.

(2) При секое проективно пресликување двојниот однос на четири точки останува ист[5]).

---

[5]) Доказ можеме аналитички вака да изведеме.

Ако правата $l \equiv Lx + My + N = 0$ (сл. I) ја сече отсечката AB



Сл. I.

во точката C така да е односот $\frac{CA}{CB} = \lambda$, тогаш, како што не учи аналитична геометрија, координатите x, y на точката C се

$$\text{(I)} \qquad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}$$

и бидејќи C лежи на l, координатите x, y ја задоволуваат нејзината равенка, од каде што следува лесно:

$$\text{(II)} \qquad \lambda = \frac{L x_1 + M y_1 + N}{L x_2 + M y_2 + N}.$$

Користејќи се со релацијата (II), можеме да го определиме двојниот однос на пресечните точки на правите α, β, γ и δ со правата p (сл. II).

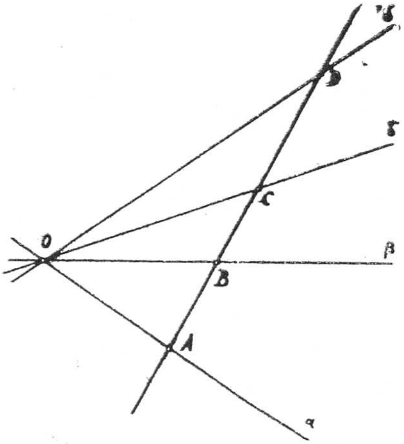
За прамен прави што врват низ четири определени точки викаме дека имаат ист „двоен однос“ како што го имаат тие точки.

Нарочно важна улога игра оној двоен однос чија што вредност е -1, т. е. да е $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1$, или $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$[6]),

што значи дека точките C и D отсечката AB ја делат во ист однос, но така да меѓу точките C и D лежи една од точките A и B[7]). Такви четири точки ги викаме хармониски, или кажуваме дека парот точки A, B го дели парот C, D хармониски.

Специално положение на четири хармониски точки добиваме ако точката C има таков положај да е $\frac{CA}{CB} = -1$ или $AC = CB$, т. е. ако точката C е во средината на отсечката AB. Тогаш, како што се покажува, точката D треба да е небитната точка од правата AB.

На црт. 30. покажано е како можат да се конструираат четири хармониски точки. Над точките А и В од дадената права



Сл. II

Координатниот почеток го положуваме во О. Правите α, β, γ и δ имаат тогаш равенки респективно:

$$y = a\,x, \quad y = b\,x, \quad y = c\,x \quad \text{и} \quad y = d\,x.$$

Поради (I) важи

$$\frac{CA}{CB} = \frac{y_1 - c\,x_1}{y_2 - c\,x_2} \; ; \quad \frac{DA}{DB} = \frac{y_1 - d\,x_1}{y_2 - d\,x_2} \; ,$$

повлечени се паралелни отсечки AP = m и BQ = BR = n. Од теоремата за пропорционални отсечки следува:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{BR} = \frac{m}{n}, \frac{DA}{DB} = \frac{AP}{AQ} = \frac{m}{n}$$

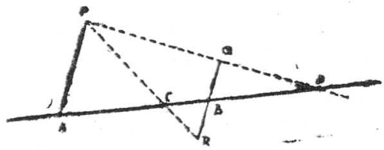
или:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{DA}{DB},$$

т.е.

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

За секој избор на m и n добиваме една четворка хармониски точки. Специјално, за m = n, точката C е во средината на AB, а правата PQ паралелна со AB и, според тоа, точката D (нивната општа точка) е небитната точка од правата AB.



Сл. 30

Користејќи се со оваа особина (2) на проективните пресликувања може да се покаже дека:

каде што x_1, y_1 и x_2, y_2 им се координатите на A односно B. Оттука, користејќи се со фактот дека A е на α и B на β, т. е. дека $y_1 = ay_1$ и $y_2 = bx_2$, имаме

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{y_1 - cx_1}{y_2 - cx_2} : \frac{y_1 - dx_1}{y_2 - dx_2} = \frac{(a-c)x_1}{(b-c)x_2} : \frac{(a-d)x_1}{(b-d)x_2}$$

и, бидејќи $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$ (правата p не минува низ O):

$$\text{(III)} \qquad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

Десната страна на релацијата (III) е независна од p. Ако правите α, β, γ, δ ги сметаме како проицирни зраци, тогаш тие на некоја друга права точките A,B,C,D ќе ги проицираат во точките A′, B′, C′, D′ со ист двоен однос што го имаат и оригиналните точки.

Овој доказ исклучува случај кога некоја од правите α, β, γ, δ лежи на ординатната оска, Но со тоа ништо не се губи од општноста, бидејќи секогаш координатната система може така да се избере да ниедна од тие прави не совпадне со ординатната оска.

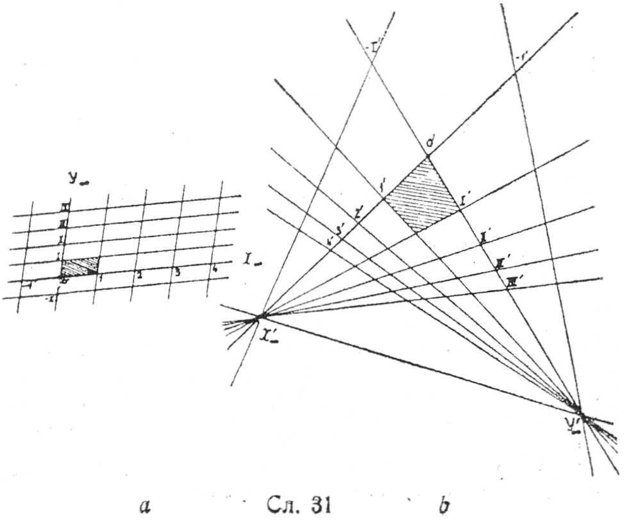
[6]) Тука е збор за таканаречените „ориентирани“ отсечки. За ориентираната отсечка AB важи дека AB = − BA.

[7]) Често се вика дека едната од точките C и D ја дели отсечката AB „внатрешно“, а другата „надворешно“.

(3) Проективното пресликување во дадена рамнина наполно е определено ако знаеме како се пресликуваат четири произволни точки, од кои што три не лежат на една права.

Оваа теорема можеме да ја докажеме на овој начин.

Ќе се послужиме со проективна слика на некоја дадена паралелограмска мрежа (сл. 31*a*). Секоја нејзина фамилија паралелни прави има иста небитна точка; ќе ги бележиме со X_∞ и Y_∞. Според горната теорема четворките точки $(-1, 1, 0, X_\infty)$; $(0, 2, 1, X_\infty)$; $(1, 3, 2, X_\infty)$; ...; $(-I, 0, I, Y_\infty)$; $(0, II, I, Y_\infty)$; $(I, III\, II, Y_\infty)$; ... се хармониски. При проективно пресликување на мрежата од сл. 31 *a* ја добиваме мрежата, дадена на сл. 31 *b*. При тоа хармониските точки преминаа пак во хармониски точки. За конструкцијата на пресликаната мрежа доволно е да знаеме четири нејзини мрежни точки, на пр. темињата на обележениот четириаголник на сл. 31 *b*. Прво, тие четири точки наведнаж ги определуваат точките X'_∞ и Y'_∞ како пресеци на страните на четириаголникот што го образуваат тие. Наредни мрежни точки на правата $0' X'_\infty$ добиваме ако кон точките $1'$, X'_∞, $0'$ ја конструираме четвртата хармониска точка — тоа е точката $2'$ —, след тоа кон точките $2'$, X_∞, $1'$ да ја конструираме пак четвртата хармониска точка — тоа ќе е точката $3'$ —, ит. н. На сличен начин ги добиваме и мрежните точки од правата $0'\ Y'_\infty$. Мрежата од сл. 31 *b* при проективно пресликување преминува очигледно пак во мрежа од овој тип — во проективна мрежа. Знаејќи, спрема тоа, како ќе се пресликаат при едно проективно пресликување четири точки, ние во битност знаеме како ќе се преслика при тоа пресликување некоја дадена проективна мрежа. Но со тоа пресликувањето наполно е определено. Аналогно како што ги „згуступваме" афини мрежи, можеме имено да ги „згуступваме" и проективните, со таа разлика што сега, место да располовуваме отсечки (види стр. 17) ги бараме четвртите хармониски точки. Сликата на точката $\frac{1}{2}$ (сл. 31*a*)



a Сл. 31 *b*

ја добиваме, на пр., користејќи го фактот дека точките $(0', 1', \frac{1'}{2}, X'_\infty)$ се хармониски. Со сукцесивно „згустување" мрежните точки можат да попаднат во оние точки, чии што слики не интересуваат, или пак произволно близу до нив. Со тоа горната теорема е докажана.

Теоремата (3) би можела сега и вака да се формулира:

(3') Проективното пресликување е определено ако знаеме како се пресликува која да е проективна мрежа.

2. Аналитичко определение на проективно пресликување

Го рамнината во која што извршуваме проективно пресликување положуваме една координатна система. Ако некоја точка од рамнината преди пресликувањето во однос на таа координатна система имаше координати x и y, тогаш, како што се покажува, координатите x' и y' на нејзината слика се пресметуваат од формулите

$$(1) \qquad x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \qquad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3},$$

каде што a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ се некои нумерични константи. По истите формули се пресметуваат и координатите на сликата на секоја точка од рамнината при истото пресликување. На проективно пресликување аналитички одговараат равенките (1). Но, се покажува и обратно, дека равенките (1) секогаш определуваат едно проективно пресликување, само ако коефициентите a_i, b_i, c_i имаат такви вредности да системот може да се реши по x, y[8]). При секој таков избор на вредностите на a_i, b_i, c_i равенките (1) ни дефинираат, значи, по едно проективно пресликување.

Да спомeнеме само бегло како би дошле до горните резултати, тргнувајќи од нашето определение на проективното пресликување:

Едно проективно пресликување е определено, ако се знае како се пресликува некоја проективна мрежа. Бидејќи квадратна мрежа е специјална проективна мрежа, доволно е да се знае како ќе се преслика таа. Во рамнината ја избираме онаа координатна система во која што мрежните линии од таа мрежа ги имаат равен-

8) т. е. ако е $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

ките $x=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$; $y=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ След пресликувањето оваа мрежа преминува во мрежа од видот даден на сл. 31*b*. Правите $x=0$, $y=0$ и небитната права при тоа ќе се пресликаат во три прави чии што равенки нека гласат респективно:

$$A_1 x' + B_1 y' + C_1 = 0$$
$$A_2 x' + B_2 y' + C_2 = 0$$
$$A_3 x' + B_3 y' + C_3 = 0$$

Равенки на секоја права низ X'_∞ и Y'_∞ (види сл. 31*b*) се респективно:

$$(1) \qquad \begin{aligned} A_1 x' + B_1 y' + C_1 &- \lambda (A_3 x' + B_3 y' + C_3) = 0 \\ A_2 x' + B_2 y' + C_2 &- \mu (A_3 x' + B_3 y' + C_3) = 0 \end{aligned}$$

За $\lambda = 0$ ја добиваме правата $0' Y'_\infty$, т. е. сликата од правата $x = 0$. За некоја вредност ρ од λ ја добиваме правата која што е слика од $x = 1$. Параметарот λ во (2) го сменуваме со $\lambda = \rho\lambda$. Сега за $\lambda' = 1$ добиваме слика на правата $x = 1$. Користејќи ја хармонијата на мрежните точки (стр. 48) може сега да се покаже дека тогаш за $\lambda' = 2$ ја добиваме сликата од $x = 2$, за $\lambda' = 3$ сликата од $x = 3$, и, општо, за $\lambda' = x_1$ (x_1 поризволен реален број) сликата од $x = x_1$.

Аналогно за $\mu = 0$ добиваме равенка на правата $0' X'_\infty$ т.е. на сликата од $y=0$. За некоја вредност σ од μ ја добиваме сликата од $y = 1$. Поставувајќи $\mu = \frac{\mu'}{\sigma}$, ја имаме за $\mu'=0$ сликата од $y = 0$, за $\mu' = 1$ сликата од $y = 1$ и, општо, за $\mu' = y_1$ сликата од $y = y_1$. Равенките (2) след горното сменување гласат:

$$(2^*) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 - x_1 (\alpha_2 x' + \beta_3 y' + \gamma_3) = 0 \\ \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 - y_1 (\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3) = 0 \end{aligned}$$

каде што

$$A_1 = \alpha_1,\ B_1 = \beta_1,\ C_1 = \gamma_1,\ A_3\rho = \alpha_3,\ B_3\, \rho_3,\ C_3\, \rho = \gamma_3,$$
$$A_2\, \rho\sigma = \alpha_1,\ B_2\, \rho\sigma = \beta_2,\ C_2\, \rho\sigma = \gamma_2$$

Точката (x_1, y_1) е определена со пресекот на правите $x=x_1$ и $y=y_1$, а нејзината слика со пресекот од сликите на овие прави, т. е. на правите чии што равенки сѐ дадени со (2*). Решение на (2*) по x' и y' ни дава, значи, координатите на пресликаната точка. А решение на системата линеарни равенки (2*) е токму од видот (1). За да системата (2*) навистина има решение, се покажува, дека е нужно да биде исполнет условот [8]) на стр. 37.

3. Проективна група. Проективна геометрија.

Слично како што се покажува дека множеството на сите афини пресликувања образува група, се покажува дека и множеството од сите проективни пресликувања образува група.

Нека ни е дадено множеството од сите можни проективни пресликувања во некоја проективна рамнина. Тоа значи да меѓу нив постои такво пресликување кое што дадената четворка точки ја пресливува во која да е друга четворка точки (бидејќи секое пресликување е определено ако се знае како ќе се пресликаат четири точки, стр. 48), ако ни во првата ни во втората четворка три точки не лежат на една права. Затоа, ако едно пресликување точките $T_1 T_2 T_3 T_4$ ги пренесе во точките $T_1' T_2' T_3' T_4'$, а некое друго пресликување точките $T_1' T_2' T_3' T_4'$ ги пресликува во $T_1'' T_2'' T_3'' T_4''$, тоа постои и такво пресликување кое што точките $T_1 T_2 T_3 T_4$ директно ги пресликува во $T_1'' T_2'' T_3'' T_4''$ (особина (I), стр. 16). Освен тоа постои покрај секое пресликување кое што точките $T_1 T_2 T_3 T_4$ ги пресликува во $T_1' T_2' T_3' T_4'$ секогаш и нему обратно пресликување, т. е. пресликување кое што точките $T_1' T_2' T_3' T_4'$ ги пресликува во $T_1 T_2 T_3 T_4$ (особина (II), стр. 16). Поради тоа, навистина:

Множеството на сите можни проективни пресликувања во дадена проективна рамнина образува група пресликувања — проективна група.

Секое афино пресликување во проективна рамнина е едно специално проективно пресликување, бидејќи секоја паралелограмска мрежа е специална проективна мрежа. Затоа сите афини пресликувања влегуваат во проективна група и, спрема тоа, афина група се јавува како подгрупа во проективната група.

Геометријата што ѝ припаѓа на проективната група се вика проективна геометрија. Таа иследува особини, релации и поими што остануваат неизменети при секое пресликување од проективната група.

Сите поими, теореми итн., што ги содржи проективната геометрија ги содржи и афината геометрија како геометрија од една подгрупа на проективната група. Но не сите поими, теореми и др. од афината геометрија ги има и во проективната геометрија. Така на пр. поимот за ортогоналност го нема во афина геометрија, затоа го нема ни во проективна геометрија; поим за паралелизам во афината геометрија постои, но не веќе и во проективната геометрија (паралелни прави, т. е. прави што се сечат во небитна точка, се пресликуваат, општо, во непаралелни прави). Гледаме дека од трите основни особини што ги имаше еквиформното пресликување (стр. 12), во афина геометрија одпадна првата, ортогоналноста, а во проективна и првата и втората: ортогоналноста и паралелизмот, и ѝ остана само последната: инциденцата.

Проективната група створува свој поим за еквивалентност на фигурите: две фигури се (проективно) еднакви ако постои пресликување од проективната група кое што едната од нив ја пресликува во друга (стр. 19). Во афина геометрија уште се прави разлика, на пр., меѓу паралелограмите и останатите четириаголници; во проективна геометрија таа разлика веќе не се прави, бидејќи секој четириаголник може да се преслика проективно во секој друг четириаголник (стр. 48). Сите четириаголници се, значи, проективно еднакви, т. е. во проективна геометрија се интересуваме само за оние особини на четириаголниците што се општи на сите нив.

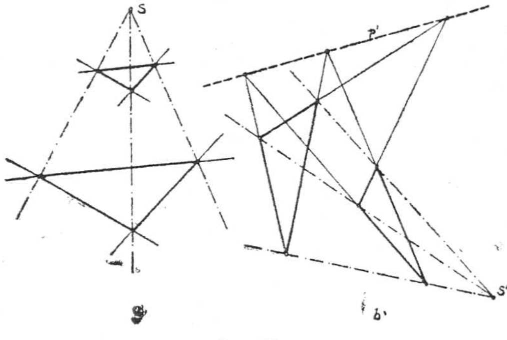
Подолу даваме за илустрација неколку проективни теореми и особини.

4. Практично исползување на проективни пресликувања.

Слично како што афини пресликувања не служат само како средство за класифициране на геометриски особини туку имаат и практично приложение, така и проективните пресликувања најдуваат и практични приложенија. Овдека даваме неколку примери на кои што ќе покажеме како проективните пресликувања можат да се искористат за добивање нови теореми, ако се познати поспециални теореми — аналогно како што покажавме за афини пресликувања.

1. Пример.

Од елементарната геометрија е познато дека два триаголници на кои што соодветните страни им се паралелни, се слични и во перспективно положение, т. е. правите кои што



Сл. 32

ги соединуваат соодветните темиња минуваат низ една точка (сл. 32*a*). При проективно пресликување на фигурата од сл. 32*a* паралелните прави се пресликуваат во прави чии што пресеци лежат на некоја права p', сликата на небитната права — како што покажува сл. 32*b*. На тој начин ја докажавме ова (Desargues-ова) теорема:

Ако по две соодветни страни на два триаголници се сечат на една права, тогаш прави-

те што ги соединуваат соодветните темиња врват низ една точка.

Дека оваа теорема навистина важи општо, се убедуваме на тој начин што триаголниците што го задоволуваат условот на теоремата ги пресликуваме проективно така да правата на која што се сечат соодветните страни на триаголниците премине во небитна права. На тој начин ја добиваме фигурата од сл. 32*а*, а во неа секогаш вопросните прави врват низ една точка, па, значи, врват низ една точка и пред тоа пресликување.

Од познатата специална теорема (која што спаѓа во афина геометрија) добивме нова, поошта теорема (која што спаѓа во проективна геометрија).

2. Пример.

На две прави што се сечат во O нека бидат избрани точките A_0, B_0, C_0, A_2, B_2 и C_2 така да е

$A_0 C_2 \parallel A_2 C_0$ и $B_0 C_2 \parallel B_2 C_0$ (сл. 33*а*)

Тогаш, поради

$$OA_2 : OC_2 = OC_0 : OA_0$$
$$OB_2 : OC_2 = OC_0 : OB_0$$

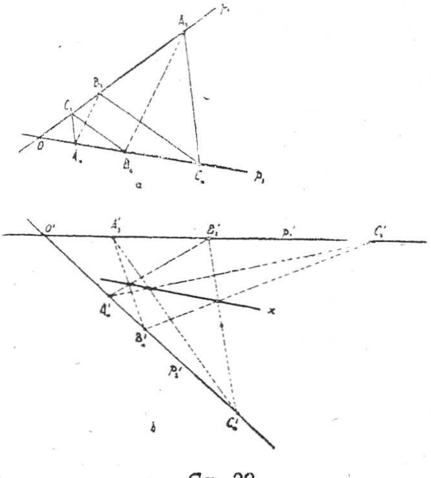
имаме

$$OA_2 \cdot OA_0 = OB_2 \cdot OB_0$$

или

$$OA_2 : OB_2 = OB_0 : OA_0,$$

т. е. и правите $A_0 B_2$ и $B_0 A_2$ се паралелни: $A_0 B_2 \parallel B_0 A_2$.



Сл. 33

Проективната слика од фигурата на сл. 33*a* дадена е на сл. 33*b*. Небитната права се пресликува во некоја права π. На неа се сечат сликите од паралелните прави. Ја добивме оваа (Pascal-ова) теорема:

Какво и да е положение на три точки A_0, B_0, C_0 на една права и три точки A_2, B_2, C_2 на некоја друга права, секогаш пресечните точки на правите

$$A_0 B_2 \text{ и } A_2 B_0;\ B_0 C_2 \text{ и } B_2 C_0;\ C_0 A_2 \text{ и } C_2 A_0$$

лежат на една права — паскалката.

Дека теоремата навистина секогаш е верна, при произволно положение на точките, покажуваме на аналоген начин како во предодниот пример. На правата p_1' избираме имено кои да е точки $A'_2 B_2' C_2'$, а на правата p_2' кои да е точки $A_0' B_0' C_0'$. Пресечните точки на правите $A_0' C_2$, $A'_2 C'_0$ односно $B'_0 C'_2$, $B_2' C_0'$ лежат на некоја права π. Над таа фигура го извршуваме она проективно пресликување кое што правата π ја пресликува во небитната права од рамнината. Со тоа ја добиваме фигурата од сл. 33*a*, за која што горе покажавме дека и третиот пар страни, $A_0 B_2$ и $B_2 A_0$, е паралелен. А тоа значи дека и правите $A_0 B_2$ и $B_2 A_0$ пред ова пресликување се сечеа на правата π — сошто горната теорема е докажана.

И во овој пример од специална теорема (афина) добивме поопшта (проективна).

3. пример.

Нарочно важни се проективните пресликувања за теоријата на конусните пресеци[10]). Се покажува имено дека особините што им се општи на сите овие фигури се токму нивните проективни особини.

За да покажеме дека сите конусни пресеци се проективно еднакви, доволно е да покажеме дека една елипса е еквивалентна на една хипербола и дека една елипса е еквивалентна на една парабола, бидејќи знаеме дека веќе во афина геометрија сите елипси се еквивалентни, истотака сите хиперболи, а лесно се увидува дека и сите параболи. А тоа ќе покажеме ако пронајдеме едно такво специално проективно пресликување кое што која да е елипса (на пр. еден круг) ја пресликува во која да е хипербола, и која да е елипса во која да е парабола. За таа цел избираме во дадената проективна рамнина, во која што е положена некоја правоагла координатна система, пресликување, дефинирано со равенките

---

[10]) Конусен пресек е општо име за елипса, хипербола и парабола.

$$x = \frac{x'}{y'}\ ,\ y = \frac{1}{y'}\ .$$

Овие равенки се од типот (1) на стр. 49, затоа пресликувањето што го определуваме е проективно. Ова пресликување го пресликува кругот

$$x^2 + y^2 = 1$$

во хиперболата

$$x^2 - y^2 = 1\ ,$$

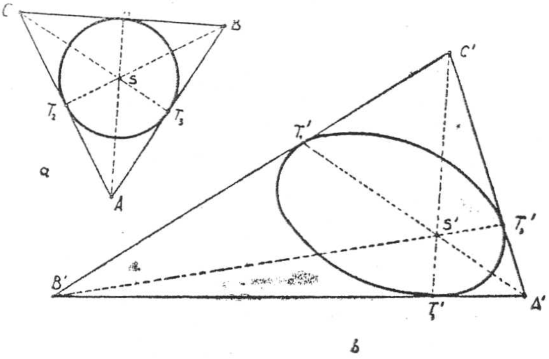
а кругот

$$x^2 + y^2 - 2\,y = 0$$

во параболата

$$y' = \frac{1}{2}(1 + x'^2).$$

Со тоа горното тврдење е докажано.



Сл. 34

Да наведеме два примери на проективни особини на конусните пресеци.

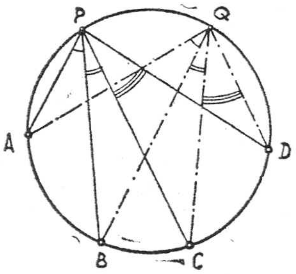
1) Ако во рамностран триаголник е впишан круг, тогаш правите што ги соединуваат темињата на триаголникот со допирните точки на спротивните страни, врват низ една точка (сл. 34*a*). Фигурата од сл. 34*a* ја пресликуваме проективно. При тоа кругот минува во некои конусен пресек, прави во прави, пресек на прави во пресек на прави, допирни точки во допирни точки. Ја добиваме, на пр., фигурата дадена на сл. 34*b* [11]).

Оттука:

Ако во кој да е триаголник е впишан кој да е конусен пресек, тогаш правите што ги соединуваат темињата на триаголникот со допирните точки на спротивните страни, врват низ една точка.

11) Конусен пресек што е впишан во триагалникот може да биед, се разбира, и хипербола и парабола, а допирните точки можат да бидат и на продоженијата на страните на триаголникот.

Дека теоремата навистина важи општо, за с е к о ј триаголник и за с е к о ј нему впишан конусен пресек, се убедуваме вака. Даден нека ни е кој да е триаголник $A'B'C'$ и во него нека е впишан кој да е конусен пресек. Правите што ги соединуваат темињата A' и B' со допирните точки T'_1 и T'_2 на спротивните страни, нека се сечат во S'. Над оваа фигура извршуваме она проективно пресликување кое што точките A', B', C' ги пресликува во темињата A, B, C на еден рамностран триаголник, а точката S' во средината S на тој триаголник. (сл. 31*a*). Тоа секогаш е можно, бидејќи четири точки проективно можат да се пресликаат во кои да е други четири точки, од кои три не се колинеарни (стр. 48). Допирните точки T'_1 и T'_2 преминуваат тогаш во средините T_1 и T_2 на страните AC и BC, и поради тоа впишаниот конусен пресек се пресликува во круг. За него теоремата важи, затоа важи и за оригиналната фигира. Со тоа валидноста на теоремата во општ случај е докажана.



Сл. 35

2) На една кружна линија (сл. 35*a*) избираме шест произволни точки A, B, C, D, P, Q. Соединувајќи ги точките A, B, C, D со P и со Q, добиваме два прамени прави што се конгруентни, бидејќи еднакво обележени аглови како периферни аглои над ист лак се еднакви. Конгруентни прамени (од четири прави) имаат, се разбира, еднакви двојни односи. Фигурата ја пресликуваме проективно. Кругот преминува во елипса, хипербола или парабола. Двојните односи остануваат при тоа неизменети, затоа:

Ч е т и р и п р о и з в о л н и т о ч к и н а к о ј д а е к о н у с е н п р е с е к с е г л е д а т о д с е к о ј а д р у г а т о ч к а о д т о ј к о н у с е н п р е с е к п о д к о н с т а н т е н д в о е н о д н о с.

Дека оваа теорема важи општо, за секој конусен пресек и за произволни точки на него, следува оттаму што секој конусен пресек можеме назад да го пресликаме во круг, (со кое што ја добиваме фигурата од сл. 35) за кој што теоремата важи.

VII. АФИНА И ЕКВИФОРМНА ГЕОМЕТРИЈА КАКО ГЕОМЕТРИИ НА ГРУПИ ПРОЕКТИВНИ АВТОМОРФИЗМИ

Спрема досега изложеното, афина геометрија е известен и з р е з од еквиформната геометрија, а проективната извесген и з р е з, дел од афината геометрија, бидејќи бројот на геометриски особини на дадени геометриски фигури се намалува ако преминеме од еквиформна во афина, и од афина во проективна геометрија.

Но може и обратно, афината и еквиформната геометрија да се вклучат во извесна смисла во проективната геометрија. Тоа веќе го знаеме: еквиформната група е подгрупа во афи ата, а оваа во проективната група. Но толкување на ова вклучување на еквиформната и афината геометрија во проективната може да стане на друг начин. Теоретски тоа е многу важно, затоа подолу ќе скицираме како станува тоа.

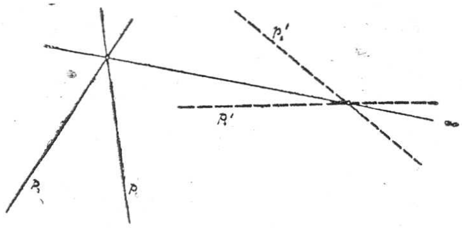
1. А ф и н а г е о м е т р и ј а

На групата проективни пресликувања поставуваме барање секое пресликување од групата да пресликува некоја произволно избрана права во себе, т. е. секоја точка од таа права да ја пресликува пак во некоја точка од таа права. Со други зборови, од целата група проективни пресликувања во дадена проективна рамнина ги земаме само оние пресликувања што го задоволуваат горното барање. На тој начин добиваме едно множество проективни пресликувања за кои што викаме дека се „а в т о м о р ф н и“ во однос на дадената права.

Општо, с е к о е м н о ж е с т в о п р е с л и к у в а њ а, о д к о и ш т о с е к о е г о п р е с л и к у в а н е к о е д а д е н о м н о ж е с т в о т о ч к и (на пр. од една права, како што е случај погоре; од некоја крива линија; од низа дискретни точки) п а к в о т о а м н о ж е с т в о, с е в и к а а в т о м о р ф н о в о о д н о с н а т о а м н о ж е с т в о. (Такво е на пр. множеството пресликувања исползувано при примерот 3, стр. 39 . Се покажува дека множеството на сите пресликувања од некоја група, автоморфни во однос на некое множество точки, секогаш образува група.

Нашето множество пресликувања, значи, образува група и таа група е подгрупа во проективната група. Да видиме која геометрија ѝ припаѓа.

Правата што ја оставаат сите пресликувања на место (на сл. 36 обележена со симболот ∞) се одликува од други прави во рамнината. Кои да е прави, имено, што се сечат на неа при секое пресликување од групата пак се пресликуваат во прави што се пресекуваат на неа. (На сл. 36 p_1 и p_2 во p_1' и p_2'):



Сл. 36

Ако од сите точки од дадената рамнина (т. е. од даденото множество точки на кои што вршиме пресликувањата) ги издвоиме точките од правата ∞ — викаме дека рамнината ја разрезуваме по правата ∞ — тогаш таква рамнина ќе ја викаме „афина", а сите точки што ги содржи таа — „битни" точки.

Секоја битна точка се пресликува при секое пресликување од нашата група секогаш во битна точка и, очигледно, две различни такви точки секогаш се пресликуваат во различни такви точки. Спрема тоа, секое пресликување од нашата група е взаемно-еднозначна (види стр. 8) колинеација (стр. 23) во афината рамнина. Се покажува дека важи и обратно.

Ова последно определение на нашите пресликувања наполно се согласува со определението (2) на афините пресликувања, дадено на стр. 23. Разлика е само во тоа што таму е работено во таква рамнина во која што работи еквиформната геометрија — во таканаре енат „евклидова" рамнина.

Од евклидовата рамнина добиваме проективна рамнина со давање на една специална права, небитната (стр. 44), а афина рамнина добиваме со извземане на која да е права од проективната рамнина. Затоа евклидовата рамнина е само специален случај на афината рамнина. Поради тоа, пресликувањата од нашата група пак ќе ги викаме „афини", самата група „афина", а и геометријата што ѝ припаѓа — „афина".

Во оваа афина геометрија правите кои што се сечат на ∞ ќе ги викаме условно „паралелни". Спрема тоа и во оваа (обопштена) афина геометрија важи теоремата, битна за афини пресликувања, дефинирани во глава V, дека паралелни прави секогаш се пресликуваат во паралелни прави.

„Паралелни" прави во оваа афина геометрија ќе станат паралелни во обикновена, елементарна смисла на зборот, ако избереме специална афина рамнина — евкладовата рамнина. Правата на која што сега се сечат „паралелните" прави е небитната права, затоа „паралелните" прави се паралелни во елементарна смисла, и при секое пресликување од групата се пресликуваат во такви.

Геометрија од групата на проективни автоморфизми во однос на која да е права е, значи, афина геометрија, обопштена на горниот начин, или елементарна[1]).

2. Еквиформна геометрија

Со давање на исклучителна улога на една права (∞) во проективната рамнина можевме да го определиме поимот за паралелност.

Во еквиформната геометрија оперираме освен со овој важен поим и со друг поим, карактерен за еквиформната геометрија — со поимот за ортогоналноста.

Групата на еквиформни пресликувања ја добиваме ако од групата на елементрано-афини пресликувања ги избереме само оние пресликувања кои што секој прав агол го пресликуваат пак во некој прав агол. Навистина, тогаш секој квадрат треба да се преслика пак во квадрат, бидејќи тој прво секако треба да се преслика во четириаголник со прави аглои, т. е. во правоаголник, а второ, и неговите дијагонали како пред пресликувањето, така и по него се сечат под прав агол, — а правоаголникот со нормални дијагонали е квадрат. Спрема тоа, квадратна мрежа секогаш се пресликува во квадратна мрежа, затоа пресликувањето е еквиформно (стр. 12).

За да ги најдеме соодветните проективни автоморфизми — т. е. оние што ја образуваат еквиформната група — треба, како што се покажува, да прибегнеме кон воведување на комплексни броеви во геометријата, што и инаку се покажува како многу корисно.

Знаеме дека при дадена координатна система Oxy на рамнината секој пар реални броеви (x, y) ја карактеризира една точка на таа рамнина. Од сега за секој пар броеви (x, y) условно ќе кажуваме дека карактеризираат некоја точка во рамнината. Ако тие броеви се реални ќе зборуваме дека и точката е „реална", а ако се комплексни — дека и

[1]) т. е. афина геометрија, дефинирана во глава V.

точката е „комплексна". Се разбира дека „комплексна точка" нема никаква врска со нагледност.

Аналогно определуваме и „комплексни прави и криви линии". Како комплесна права во рамнината Oxy, на пр., ќе ја разбираме совкупноста на точките (x, y) чии што координати ја задоволуваат равенката

$$Ax + By + C = 0,$$

каде што A и B не се едновремено нула, а барем еден од A, B и C е комплексенброј.

Во аналитичка геометрија играат нарочно важна улога две такви прави, имено

$$(1) \qquad \begin{aligned} y &= ix + m \\ y &= -ix + m \end{aligned}$$

Дефинирајќи го двојниот однос на комплексни прави така да тој се пресметува по истите формални правила како при реалните, добиваме можност да го определиме поимот за нормалноста проективно, т. е. со помошта на двојни односи. Се покажува имено дека двојнинот однос на правите (1) и к о и д а е пар нормални прави што се сечат во пресекот од комплексните прави (1) секогаш е равно на —1. А се покажува и обратно, ако двојниот однос на четири прави е —1, а еден пар прави од нив се правите (1), тогаш другиот пар се две нормални прави.

Горното можеме да го докажеме на овој начин.

Координатниот почеток нека е во темето на кои да е прав агол. Тогаш краците на тој агол имаат равенки

$$y = \text{к}x, \quad y = -\frac{1}{\text{к}}x$$

а правите (1):

$$y = ix, \quad y = -ix$$

Двојниот однос D ќе е сега (стр. 46)

$$D = \frac{i - \text{к}}{-\frac{1}{\text{к}} - i} : \frac{-i - \text{к}}{-\frac{1}{\text{к}} + i} = -1 ,$$

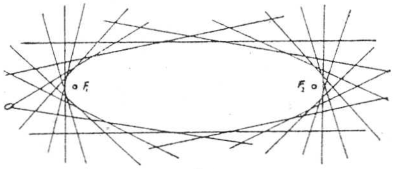
навистина, независно од к, секогаш —1.

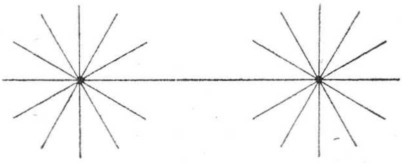
И обратната теорема лесно се докажува, изведувајќи го овој доказ во обратен смер.

Ако сега од проективната група пресликувања, дефинирани аналитички, бараме да правите (1) при нито едно пресликување не си го менуваат својот „правец“, т. е. ако од проективната група ги издвоиме само оние пресликувања кои што небитните точки на правите (1) ги оставаат на место, тогаш при секое вакво пресликување кој да е прав агол ќе се преслика пак во прав агол. Тоа следува од горе споменатата теорема, ако се земе предвид дека двојниот однос при секое проективно пресликување останува неизменет. Споменатите две небитни комплексни точки ги викаме „апсолутно кружни точки“[2]). Оттука

Еквиформната геометрија е геометрија на групата проективни пресликувања, автоморфни во однос на парот од апсолутни кружни точки.[3])

Овие констатации се од голема принципна важност, а не само празна игра со зборови. След додавање, адјунгирање на апсолутно кружни точки во горен смисол ние сме имено во состојание и метричните поими, како што е на пр. прав агол, да ги толкуваме проективно. А од тука ни е дадена можност геометријата да ја обопштиме во сосем нов правец.





Сл. 37

Пар точки може да се смета како „дегенерирана“ елипса или хипербола. Множеството на тангентите на една елипса, чија што една главна оска сѐ повеќе ѝ се смалува, (сл. 37*a*) во граничен случај доваѓаат во положај, даден на сл. 37*b* и, навистина, определуваат две точки.

---

2) „кружни“ затоа што, како што лесно се покажува, секој круг од рамнината врви низ нив.

3) И тука би можеле, аналогно како при афина геометрија, да добиеме на известен начин „обопштена“ еквиформна геометрија. Тоа би станало на тој начин што од проективната група пресликувања не би барале да оставаат на место две специјални комплексни точки — апсолутно-кружни точки — туку кои да е две комплексни точки. Види на пр. Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, стр. 479 и и сл. Москва, Огиз, 1945.

Наведнаш ни се наметнува мислата да ги иследиме ониe геометрии кои што им припаѓаат на групи проективни пресликувања, автоморфни не во однос на еден пар точки, т. е. на еден „дегенериран“ конусен пресек, туку во однос на еден „недегенериран“ конусен пресек (а п с о л у т е н к о н у с е н п р е с е к). Во овие геометрии треба поимите од еквиформната геометрија (на пр. паралелизмот и ортогоналност) така да ги обопштиме (по дефиниција) да од нив ги добиеме соодведните елементарни (еквиформно) геометриски поими, ако апсолутен конусен пресек дегенерира во апсолутно - кружни точки на евклидовата рамнина. На тој начин доваѓаме до геометрии, што можат да се постројат и на друг, а к с и о м а т и ч е н начин, а во кои што дел од аксиомите им противоречи на соодветните аксиоми на евклидовата (еквиформна) геометрија. Затоа овие геометрии ги викаме „н е е в к л и д о в и“ геометрии.

* * *

Видовме како геометриските пресликувања, покрај големото практично значење што тие го имаат, се важни нарочно затоа што тие ни овозможуваат систематска поделба на сета геометрија.

Ние се задоволивме со тоа, на кратко да се запреме само на таканаречените елементарно - геометриски пресликувања и покажавме на тој начин само тоа, како може систематски да се распредели градивото само од таканаречената, е л е м е н т а р н а г е о м е т р и ј а. При тоа ние споменавме само две, најважните, подгрупи од проективната група.

Со класификацијата на елементарногеометрискиот материјал може во овој смисол, се разбира, да се продолжи, земајќи во предвид и други подгрупи во проективната група.

Ако не се ограничуваме на елементарно - геометриските пресликувања, со класификацијата можеме да продолжиме и во друг правец. Тогаш ќе добиеме најразноврсни групи, но од кои што секоја ја има барем еквиформната група како своја подгрупа. Ќе добиеме и групи поопсежни од проективната група, ќе ја добиеме и најопсежната од сите други можни групи[4]). При оваа последна група ќе се запазат најмал можен број геометриски особини, затоа пак се тие во извесна смисла „најчисти“ геометриски особини и затоа геометријата што ѝ припаѓа, т о п о л о г и ј а т а, ја викаат и „најчиста“ геометриска дисциплина.

---

[4]) Ако си замислиме како модел на рамнината една многу танка плоча (слој) од идеално еластичен каучук, тогаш при севозможни растегнувања и стегања на тој каучук, точките од која да е „фигура“ на него ќе извршуваат пресликувања од споменатата група.

Карактеризирање на разни видои геометрии по овој принцип[5]), предложен од знаменитиот немски математик Felix Klein, е спроведен во литературата наполно само за оние случаи, на кои што ние се запревме во нашиот членок.

Распоред на градивото по овој принцип имаат веќе и мнозина модерни универзитетски учебници по аналитичка геометрија[6]).

---

[5]) Треба да се забележи дека модерните иследувања (во диференциална геометрија) покажаа дека рамките што на геометријата и ги даде F. Klein, дефинирајќи ја како теоријата на инварианти на една група пресликувања, веќе станале тесни. Тие денеска не можат да ја опфатат целокупноста на геометриските иследувања (во таканаречената „виша" диференцијална геометрија). (Види на пр. E. Salkowski, Affine Differentialgeomet ie, S. 100, Be lin, 1934). Но и покрај това Klein-овото определение на геометриите, неговото уочување на тесната врска меѓу геометријата и теоријата на групите, е и денес се ушге многу важно и актуелно.

[6]) Види на пр.:

Н. И. Мусхелишвили, Курс аналитической геометрии, Москва, Огиз, 1947;

С. С. Бюшгенс, Аналитическая геометрия, ч. I, II, Москва, Огиз, 1946;

Hefter-Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. I, II. Leipzig, 1930.

H. Beck, Elementargeometrie, Bd. I, II, Leipzig, Akad. Verlgs. 1930.

Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, Москва, Огиз, 1948, *AUSZUG*

ELEMENTARGEOMETRISCHE ABBILDUNGEN

und

BEGRIFF DER TRANSFORMATIONSGRUPPE IN DER GEOMETRIE

Im vorliegenden Artikel wird mit elementarsten Mitteln — um auch Lehrern ohne oder mit unvollendeten Fakultätausbild ng, deden dieses Büch'ein als Hilfsliteratur in erster Linie gewidmet ist, verständlich zu sein — den Ideen *F. Klein's* folgend gezeigt, welche Bedeutung die geometrischen Abbildungen und der Begriff der Transformationsgruppe für die Systematisierung der Geometrie hat.

Bei einer Einschränkung auf elementargeometrische Abbildungen wird nebenbei an manchen Beispielen außerdem gezeigt, wie man geometrische Abbildungen auch praktisch ausnützen kann, um nämlich aus bekannten, für spezielle Fälle geltenden Sätzen oder geometrischen Konstruktionen, allgemeinere zu bekommen, wofür besonders die Affinabbildung benutzt wurde.