THÉORIE DES ENSEMBLES. — *Sur certaines relations de l'algèbre des ensembles.* Note de M. **Dragoslav S. Mitrinovitch**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Un théorème généralisant la proposition désignée par O. Ore sous le nom d'axiome de Dedekind. Application aux ensembles finis d'entiers distincts.

1. Considérons l'ensemble E et formons-en des parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ quelconques, supposées non toutes disjointes entre elles, les s combinaisons (sans répétitions) k à k, à savoir les ensembles

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}, \ldots, \{A_{n-k+1}, A_{n-k+2}, \ldots, A_n\}$$

avec

$$s=\binom{n}{k}, \qquad 1 \leqq k \leqq n.$$

Envisageons ensuite les deux suites d'ensembles

$$P_1 = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k; \qquad \ldots; \qquad P_s = A_{n-k+1} \cap A_{n-k+2} \cap \ldots \cap A_n;$$

$$Q_1 = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k; \qquad \ldots; \qquad Q_s = A_{n-k+1} \cup A_{n-k+2} \cup \ldots \cup A_n.$$

Ceci étant, nous avons obtenu la proposition suivante :

Théorème. — *Si le nombre naturel n est impair et $k=(n+1)/2$, les n ensembles partiels* A_i *quelconques d'un ensemble* E *satisfont à la relation*

$$\bigcup_{i=1}^{i=\binom{n}{k}} P_i = \bigcap_{i=1}^{i=\binom{n}{k}} Q_i, \tag{1}$$

qui met en évidence le fait que l'expression figurant au premier membre reste invariante si les opérations $\cap$ et $\cup$ s'échangent.

Nous avons trouvé aussi les relations suivantes

$$\bigcup_{i=1}^{i=\binom{n}{k}} P_i \supseteqq \bigcap_{i=1}^{i=\binom{n}{k}} Q_i \quad \text{si} \quad \begin{cases} 1 \leqq k \leqq \left[\dfrac{n+1}{2}\right], & n \text{ nombre naturel pair,} \\ 1 \leqq k \leqq \dfrac{n+1}{2}, & n \text{ nombre naturel impair;} \end{cases} \tag{2}$$

$$\bigcup_{i=1}^{i=\binom{n}{k}} P_i \subseteqq \bigcap_{i=1}^{i=\binom{n}{k}} Q_i \quad \text{si} \quad \begin{cases} \left[\dfrac{n+1}{2}\right] < k \leqq n, & n \text{ nombre naturel pair,} \\ \dfrac{n+1}{2} < k \leqq n, & n \text{ nombre naturel impair.} \end{cases} \tag{3}$$

Pour $n=3$, $k=2$, la relation (1) se réduit à

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3),$$

ce qui présente la relation de Dedekind, appelée par O. Ore [1] *l'axiome de Dedekind*.

2. *Application*. — Soient

1° $a_1, a_2, \ldots, a_n$ divers nombres naturels distincts;

2° $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ leur plus grand commun diviseur;

3° $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ leur plus petit commun multiple.

Si n désigne un nombre naturel impair et $k=(n+1)/2$, on a

$$\begin{aligned}&[(a_1, a_2, \ldots, a_k), \ldots, (a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \ldots, a_n)]\\ &=([a_1, a_2, \ldots, a_k], \ldots, [a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \ldots, a_n]),\end{aligned}$$

le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple s'étendant à toutes les combinaisons des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pris k à k.

On a aussi deux relations correspondant aux inclusions (2) et (3), mais nous les omettons dans cette Note.

3. Dans le cas où les ensembles partiels $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont disjoints, la relation (1) est valable, non seulement pour n nombre naturel impair et $k=(n+1)/2$, mais aussi dans le cas où n et k désignent deux nombres naturels quelconques sous la condition que

$$1 < k < n.$$

Pour $k=n$ et $k=1$ restent valables respectivement (2) et (3).