THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ. — *Sur une équation différentielle indéterminée intervenant dans un problème important de l'Élasticité*. Note de M. **Dragoslav S. Mitrinovitch**, présentée par M. Henri Villat.

1. Dans sa Thèse [1] de doctorat *The membrane Theory of Shells of Revolution*, présentée en 1943 à Princeton University, C. Truesdell a observé,

---

(²) C. Sannié et D. Guérin, *Éléments de Police scientifique*, 3, Paris, 1939.

(¹) Cette Thèse est insérée dans les *Transactions of the American Mathematical Society*, 58, 1945, p. 96-166. *Cf.*, en particulier, p. 139 et 142.

au sujet de l'équation des déplacements [2]

$$\frac{F''}{F} - \left(\frac{f'''}{f''} + \frac{f'}{f}\right)\frac{F'}{F} + n^2\frac{f''}{f} = 0 \tag{1}$$

(n, nombre naturel; F et f, deux fonctions de x), que, malheureusement, on ne connaît pas de méthode fournissant des solutions de cette équation [3].

Dans cette Note, nous allons donner un procédé qui offre une solution (F, f) *de* (1), *solution qui s'exprime par des quadratures et contient une fonction complètement arbitraire et trois constantes arbitraires.*

Examinons si l'équation indéterminée (1) peut être satisfaite par les fonctions F et f dans le cas où elles sont liées par la relation

$$F = \sigma(f'), \tag{2}$$

σ étant une fonction de f', pour le moment indéterminée.

De là, on obtient

$$F' = f''\frac{d\sigma}{dp}, \qquad F'' = f'''\frac{d\sigma}{dp} + f''^2\frac{d^2\sigma}{dp^2}, \qquad \left(p = f' = \frac{df}{dx}\right). \tag{3}$$

L'équation (1), en vertu des formules (2) et (3), se transforme en

$$ff''\frac{d^2\sigma}{dp^2} - f'\frac{d\sigma}{dp} + n^2\sigma = 0. \tag{4}$$

Si l'on remplace f' et f'' respectivement par p et $p(dp/df)$, la dernière équation prend la forme

$$\frac{df}{f} = \frac{p\dfrac{d^2\sigma}{dp^2}}{p\dfrac{d\sigma}{dp} - n^2\sigma}\,dp, \tag{5}$$

où les variables sont séparées, la fonction $\sigma(p)$ étant arbitraire.

La solution générale de (5) est

$$f = \frac{1}{A}\lambda(p) \qquad (A = \text{const. arbitraire}), \tag{6}$$

λ étant connu si l'on donne la fonction $\sigma(p)$.

De (6) on trouve

$$p = \mu(Af), \tag{7}$$

ou bien

$$\int \frac{df}{\mu(Af)} = x + B \qquad (B = \text{const. arbitraire}), \tag{8}$$

d'où

$$f = \theta(x, A, B). \tag{9}$$

---

[2] Les accents marquent des dérivées par rapport à x.

[3] On écarte le cas simple $f = ax + b$, où a, b sont des constantes.

D'après (2), on a finalement

$$F = \sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Par suite, les expressions (9) *et* (10) *déterminent une solution de* (1). *Pour l'obtenir explicitement, la forme de* σ *dont on dispose arbitrairement étant donnée, il faut faire, au total, deux quadratures et deux inversions de variables.*

Si l'on prend le cas particulier

$$\sigma(f') = f'^{k} \qquad (k = \text{nombre quelconque}),$$

on trouve

$$f(x) = B(x+A)^{m} \qquad F(x) = C(x+A)^{km-k} \qquad \left(m = \frac{k(k-1)}{n^2+k^2-2k}\right),$$

où A, B, C sont des constantes.

3. Le procédé indiqué s'applique aussi, avec succès, à d'autres équations indéterminées. A cet effet, il faut partir d'une relation

$$F = \sigma(x, f, f', \ldots, f^{(\nu)}),$$

la fonction σ étant convenablement choisie pour chaque cas envisagé.

Ainsi, par exemple, l'équation

$$f''F'' - f'''F' + H_1(f)\,H_2(f')\,H_3(F)\,f''F' + H_1(f)\,H_4(f')\,H_5(F)\,f''^2 = 0 \tag{11}$$

se ramène à une équation à variables séparées si l'on cherche ses solutions liées par la relation (2).

L'équation (11) se réduit à (1) si les fonctions H_i dépendant des arguments indiqués ont les expressions suivantes :

$$H_1(f) \equiv \frac{1}{f}, \qquad H_2(f') \equiv f', \qquad H_3(F) \equiv -1, \qquad H_4(f') \equiv n^2, \qquad H_5(F) \equiv F.$$

Dans une autre étude, nous pensons développer l'idée de cette Note.