

1. Trois nombres a_i, a_j, a_k quelconques appartenant à l'ensemble des nombres réels vérifient, comme on sait (1), la relation

$$(1) \quad \begin{aligned} & \min \{ \max(a_i, a_j), \max(a_i, a_k), \max(a_j, a_k) \} \\ & = \max \{ \min(a_i, a_j), \min(a_i, a_k), \min(a_j, a_k) \}, \end{aligned}$$

qui met en évidence le fait que le premier membre reste invariant si les opérations *max* et *min* s'échangent.

Posons maintenant la question de savoir s'il existe une expression plus générale jouissant de ladite propriété. Comme il sera indiqué dans ce qui suit, la réponse est affirmative.

2. Prenons dans l'ensemble des nombres réels les n nombres quelconques, en les rangeant par ordre de grandeur

$$(E) \quad a_1, a_2, \dots, a_n.$$

avec

$$(2) \quad a_1 < a_2 < \dots < a_k < \dots < a_n.$$

A partir des n éléments de l'ensemble (E) on peut former les $\binom{n}{k}$ combinaisons (sans répétitions) k à k , à savoir

$$(3) \quad a_1, a_2, \dots, a_k; \dots; a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_n \quad (1 \leq k \leq n).$$

Par l'application d'opérations *max* et *min* à toutes les combinaisons (3), on peut former les expressions

$$(4) \quad N = \min \{ \max(a_1, a_2, \dots, a_k), \dots, \max(a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_n) \};$$

$$(5) \quad M = \max \{ \min(a_1, a_2, \dots, a_k), \dots, \min(a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_n) \}.$$

D'après (2), les expressions (4) et (5) deviennent

$$(6) \quad N = \min(a_k, \dots, a_n) = a_k;$$

$$(7) \quad M = \max(a_1, \dots, a_{n-k+1}) = a_{n-k+1}.$$

(*) Séance du 3 janvier 1951.

(1) Voir, par exemple, O. ORE, *Number Theory and its History*, New-York, 1948, p. 107.

Si $k = n - k + 1$, c'est-à-dire $k = (n + 1)/2$, on a

$$(8) \quad N = M.$$

Étant donné que k est un entier positif, la relation (8) aura lieu sous la condition que n représente un entier positif impair et dans ce cas seulement.

Cela permet d'énoncer ce qui suit :

THÉORÈME. — *Si n est un entier impair positif, les n nombres quelconques (E), appartenant à l'ensemble des nombres réels, satisfont à la relation*

$$(9) \quad \begin{aligned} & \min \{ \max(a_1, a_2, \dots, a_k), \dots, \max(a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_n) \} \\ & = \max \{ \min(a_1, a_2, \dots, a_k); \dots, \min(a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_n) \}, \end{aligned}$$

où les opérations \max et \min sont appliquées à toutes les combinaisons de la classe $k [k = (n + 1)/2]$, formées de n nombres (E).

Il est évident que la relation (9) renferme la relation (1) comme cas particulier en posant $n = 3$ dans la formule (9).

3. En étudiant les expressions (6) et (7) on est conduit aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} M > N & \left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } 1 \leq k \leq \left[\frac{n+1}{2} \right] & \text{et } n = \text{nombre entier pair,} \\ \text{» } 1 \leq k < \frac{n+1}{2} & \text{et } n = \text{» » impair;} \end{array} \right. \\ M < N & \left\{ \begin{array}{ll} \text{» } \left[\frac{n+1}{2} \right] < k \leq n & \text{et } n = \text{» » pair,} \\ \text{» } \frac{n+1}{2} < k \leq n & \text{et } n = \text{» » impair.} \end{array} \right. \end{aligned}$$