TREĆA METODA INTEGRACIJE NEMÉNYI-TRUESDELL-ove JEDNAČINE

DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ

1. Predmet ovog članka je neodređena diferencijalna jednačina[1])

$$\frac{F''}{F} + k\frac{f''}{f} = 0, \qquad (k = \text{const} \neq 0), \tag{1}$$

sa dve nepoznate funkcije $F(x)$ i $f(x)$.

U slučaju kada je

$$k = n^2 - 1, \qquad (n = \text{prirodan broj} \neq 1),$$

na jednačinu (1) se svodi, kao što su pokazali Neményi i Truesdell[2]), opšti problem ravnoteže iz membranske teorije ljuske koja ima oblik rotacione površine.

Nedavno smo dali dve metode[3]) *integracije pomoću kvadratura* Neményi-Truesdell-*ove jednačine* (1), *a sada ćemo navesti treću metodu koja je veoma jednostavna i primenljiva takođe na neodređene jednačine opštijeg oblika od jednačine* (1).

2. Ispitajmo da li jednačina (1) ima rešenja (F, f) koja su vezana relacijom

$$F = T(f), \tag{2}$$

gde je T neka proizvoljna funkcija promenljive f, neprekidna i diferencijabilna.

---

1) $F' = \frac{dF}{dx}$, $F'' = \frac{d^2F}{dx^2}$; $f' = \frac{df}{dx}$, $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$.

2) *Videti:* [1], [2], [3].

3) *Videti:* [4], [5], [6].

Iz relacije (2) se dobija[4])

(3) $$F' = f'\dot{T}, \quad F'' = f'^2\ddot{T} + f''\dot{T}.$$

Neodređena jednačina (1), prema (3), postaje

(4) $$ff''\dot{T} + ff'^2\ddot{T} + kf''T = 0.$$

Stavljajući

$$f' = p,$$

jednačina (4) dobija oblik[5])

(5) $$(f\dot{T} + kT)\frac{dp}{df} + pf\ddot{T} = 0.$$

Ako je

$$T = cf^{-k}, \quad (c = \text{proizvoljna konstanta}),$$

tada je

$$f\dot{T} + kT \equiv 0.$$

Uz pretpostavku

$$T \neq cf^{-k},$$

jednačina (5) dobija oblik

(6) $$\frac{1}{p}dp + \frac{f\ddot{T}}{f\dot{T} + kT}df = 0,$$

gde su promenljive razdvojene.

Posle integracije, jednačina (6) daje

$$p = A\exp\left(-\int\frac{f\ddot{T}}{f\dot{T} + kT}df\right),$$

tj.

(7) $$p = A\lambda(f), \quad (A = \text{integraciona konstanta}).$$

---

4) $\dot{T} = \frac{dT}{df}$, $\ddot{T} = \frac{d^2T}{df^2}$.

5) Slučaj kada je

$$f(x) \equiv ax + b, \quad (a, b = \text{const.}),$$

isključujemo iz rasmatranja.

Iz (7) izlazi

$$\int \frac{df}{\lambda(f)} = Ax + B, \quad (B = \text{integraciona konstanta}), \tag{8}$$

odakle se, posle izvršene integracije i inverzije, dobija

$$f = \mu(Ax + B).$$

Ako funkciji T (f), *sa kojom raspolažemo proizvoljno, unapred damo jedan određenu oblik, potrebno je izvršiti, jednu za drugom, dve kvadrature i na kraju jednu inverziju, da bismo eksplicitno našli funkciju* f (x).

3. Poređenjem gore izložene metode sa dve metode ranije objavljene, dolazi se do ovih zaključaka:

1° Iznalaženje rešenja (F, f) jednačine (1) po prvoj[6] od navedenih metoda je najkomplikovanije, dok je po drugoj[7] najprostije;

2° Sve se tri metode mogu uspešno primeniti na neodređene diferencijalne jednačine vrlo opšteg oblika;

3° Samo treća metoda, formulisana u generalisanoj formi, daje mogućnost da se integrali neodređena jednačina[8]

$$\frac{F''}{F} - \left(\frac{f'''}{f''} + \frac{f'}{f}\right)\frac{F'}{F} + n^2\frac{f''}{f} = 0 \tag{9}$$

(n = prirodan broj)

na koju se svodi *problem pomeranja*[9] iz teorije elasticiteta.

Zaista, ako se jednačini (9) pridruži relacija[10]

$$F = T(f'),$$

gde je T neka proizvoljna funkcija od f', dolazi se do jedne diferencijalne jednačine u kojoj se promenljive mogu razdvojiti.

4. Metoda, prikazana u tački 2 ovog članka, može se primeniti, na primer, na jednačinu oblika

---

6) *Videti* [4] i [5].

7) *Videti* [6].

8) Isključuje se iz posmatranja slučaj

$$f \equiv ax + b, \qquad (a, b = \text{const}).$$

9) *Videti* [3], str. 139 i str. 142.

10) Pretpostavlja se da je $T \neq C(f')^{n^2}$, (C = const).

$$F''H_1(F,f)+f''H_2(F,f)=f'^m H_3(F,f), \tag{10}$$

$$(m=\text{const}),$$

gde su H_1, H_2, H_3 ma kakve funkcije naznačenih argumenata.

Ako se jednačini (10) pridruži relacija (2) i uzmu u obzir obrasci (3), dobija se

$$(\dot{T}H_1+H_2)\frac{dp}{df}+\ddot{T}H_1 p=H_3 p^{m-1}. \tag{11}$$

Pošto su, s obzirom na relaciju (2), izrazi

$$\dot{T}H_1+H_2, \quad \ddot{T}H_1, \quad H_3$$

funkcije jedino promenljive f, jednačina (11) je Bernoulli-eva tipa čija je integracija poznata.

Ovde se pretpostavlja da se izraz

$$\dot{T}H_1[T(f),f]+H_2[T(f),f]$$

identički ne anulira.

Primetimo da se jednačina (10) svodi na (1) u slučaju kada funkcije H_1, H_2, H_3 imaju, na primer, ove partikularne oblike:

$$H_1\equiv\frac{1}{F}, \quad H_2\equiv\frac{k}{f}, \quad H_3\equiv 0, \qquad (k=\text{const}).$$

Uopšte, podesnim izborom funkcije

$$T\left(x,f,\frac{df}{dx},\frac{d^2f}{dx^2},\ldots,\frac{d^nf}{dx^n}\right)$$

mogu se integraliti neke neodređene jednačine, koje pripadaju tipu

$$\Omega\left(x;F,\frac{dF}{dx},\frac{d^2F}{dx^2},\ldots,\frac{d^pF}{dx^p};f,\frac{df}{dx},\frac{d^2f}{dx^2},\ldots,\frac{d^qf}{dx^q}\right)=0$$

ako im se pridruži relacija

$$F=T\left(x,f,\frac{df}{dx},\frac{d^2f}{dx^2},\ldots,\frac{d^nf}{dx^n}\right).$$

Résumé

TROISIÈME MÉTHODE D'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DE NEMÉNYI - TRUESDELL

Par
D. S. MITRINOVITCH

1. L'objet de cette Note est l'équation indéterminée[1]

$$\frac{F''}{F} + k\frac{f''}{f} = 0, \qquad (k = \text{constante arbitraire} \neq 0), \tag{1}$$

aux deux fonctions inconnues $F(x)$ et $f(x)$, présentant, lorsque

$$k = n^2 - 1, \qquad (n = \text{nombre naturel} \neq 1),$$

l'équation fondamentale d'un problème des couches élastiques.

Ayant été établie par Neményi[2] et utilisée avec succès par Truesdell[3], comme point de départ dans ses recherches relatives à la théorie des couches élastiques, nous avons dénommé cette équation de Neményi - Truesdell.

Tout récemment, nous avons indiqué deux méthodes[4] fournissant des solutions de l'équation (1), exprimées par des quadratures. Ici, nous exposerons une troisième méthode, fort simple, qui donne aussi des solutions de l'équation en question.

2. Proposons-nous de trouver, si cela est possible, la solution (F, f) de (1), satisfaisant à la relation

$$F = T(f), \tag{2}$$

T étant une fonction arbitraire de f, supposée continue et dérivable.

La relation (2) fournit

$$F' = f'\dot{T}, \quad F'' = f'^2\ddot{T} + f''\dot{T}.$$

En portant ces valeurs dans (1), on obtient

$$ff''\dot{T} + ff'^2\ddot{T} + kf''T = 0. \tag{3}$$

---

[1]) Les accents désignent des dérivées par raport à x; les points des dérivées par rapport à f.

[2]) *Cf.* [1].

[3]) *Cf.* [2], [3].

[4]) *Cf.* [4], [5], [6].

Cette équation déterminant la fonction $f(x)$, si l'on pose $f' = p$, prend la forme

$$\frac{1}{p}\,dp + \frac{f\ddot{T}}{f\dot{T}+kT}\,df = 0, \tag{4}$$

en supposant que l'expression $f\dot{T}+kT$ ne s'annule pas identiquement.

L'équation (4), après l'intégration, s'écrit

$$p = A\exp\left(-\int\frac{f\ddot{T}}{f\dot{T}+kT}\,df\right),$$

d'où

$$\int\left[\exp\left(\int\frac{f\ddot{T}}{f\dot{T}+kT}\,df\right)\right]df = Ax+B, \tag{5}$$

A et B désignant deux constantes d'intégration.

On en tire

$$f = \theta(Ax+B),$$

la fonction θ étant connue si l'on donne la forme de T dont on dispose arbitrairement.

La fonction $\dot{T}(f)$ *étant assignée par avance, pour trouver explicitement la fonction* $f(x)$ *et par suite* $F(x)$, *on aura à effectuer, l'une après l'autre, deux qudratures (voir* la relation (5)) *et finalement à faire une inversion des variables.*

3. Ce procédé d'intégration s'applique aussi avec le même succès à des équations de forme beaucoup plus générale. En nous réservant d'y revenir dans un autre travail, citons comme exemple l'équation

$$F''H_1(F,f) + f''H_2(F,f) = f'^m H_3(F,f) \tag{6}$$

$$(m = \text{const})$$

qui se réduit à (1), si les fonctions H_1, H_2, H_3 ont les expressions très particulières suivantes:

$$H_1 \equiv \frac{1}{F}, \quad H_2 \equiv \frac{k}{f}, \quad H_3 \equiv 0, \qquad (k = \text{const}).$$

L'équation (6) avec la condition (2) prend la forme

$$(\dot{T}H_1 + H_2)\frac{dp}{df} + \ddot{T}H_1 p = H_3 p^{m-1}. \tag{7}$$

Étant donné que les expressions

$$\dot{T}H_1 + H_2, \quad \ddot{T}H_1, \quad H_3$$

ne sont fonctions que de la variable f, l'équation (7) est précisément une équation du type de Bernoulli, dont l'intégration est bien connue.

Plus généralement, par un choix convenable d'une fonction

$$T\left(x, f, \frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n f}{dx^n}\right),$$

on pourra intégrer des équations indéterminées, rentrant dans le type

$$\Omega\left(x; F, \frac{dF}{dx}, \frac{d^2F}{dx^2}, \ldots, \frac{d^pF}{dx^p}; f, \frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \ldots, \frac{d^q f}{dx^q}\right) = 0,$$

en rattachant à cette équation la relation suivante

$$F = T\left(x, f, \frac{df}{dx}, \frac{d f}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n f}{dx^n}\right).$$

LITERATURA — INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

P. Neményi

[1] Beiträge zur Berechnung der Schalen unter unsymmetrischer und unstetiger Belastung (*Bygningsstatiske Meddelelser*, Denmark, 1936).

P. Neményi and C. Truesdell

[2] A stress function for the membrane theory of shells of revolution (*Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 29, 1943, pp. 159—162).

C. Truesdell

[3] The membrane theory of shells of revolution (*Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 58, 1945, pp. 96—166).

D. S. Mitrinovitch

[4] Mise en correspondance d'un problème non résolu de la théorie de l'Élasticité avec un problème résolu par Darboux et Drach (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 231, 1950, p. 327—328).

[5] Sur l'équation différentielle d'un problème important de la théorie de l'Élasticité (*Annuaire de la Faculté de Philosophie de l'Université de Skopje*, Section des sciences naturelles t. 3, № 5, 1950, 22 pages).

[6] On an equation of Neményi and Truesdell (*Journal of the Washington Academy of Sciences*, 1951, sous presse).