SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LAPLACE

Par
D. S. MITRINOVITCH

1. Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad x y^{(n)} - mn y^{(n-1)} + a x y = 0, \qquad (n \geqslant 2),$$

m et n étant des nombres naturels, a une constante quelconque et $y^{(k)} = d^k y / dx^k$.

Leslie Ellis a trouvé la solution générale de (1) sous la forme

$$y = x^{(m+1)n-1} \left(x^{1-n} \frac{d}{dx} \right)^m \frac{u}{x^{n-1}},$$

où la fonction $u(x)$ est déterminée par l'équation

$$u^{(n)} + au = 0.$$

Nous connaissons ce résultat grâce à Forsyth {*cf.* [1], p. 210, et p. 748—750} et Kamke {*cf.* [2], p. 539, équation 5·6}, résultat obtenu par un procédé assez compliqué.

Dans cette Note, nous allons indiquer un autre procédé d'intégration de l'équation (1), *fondé sur la différentiation successive du polynome différentiel*

$$(2) \qquad L = x y^{(n)} - mn y^{(n-1)} + a x y,$$

procédé fort simple et applicable aussi à d'autres équations linéaires.

2. Prenons le polynome (2) et formons ses dérivées par rapport à x suivantes:

$$L^{(n)} = xy^{(2n)} - (mn - n)\, y^{(2n-1)} + axy^{(n)} + any^{(n-1)},$$

$$L^{(2n)} = xy^{(3n)} - (mn - 2n)\, y^{(3n-1)} + axy^{(2n)} + 2\, any^{(2n-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L^{(kn)} = xy^{(kn+n)} - (mn - kn)\, y^{(kn+n-1)} + axy^{(kn)} + kany^{(kn-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L^{(mn-n)} = xy^{(mn)} - ny^{(mn-1)} + axy^{(mn-n)} + (m-1)\, any^{(mn-n-1)},$$

$$L^{(mn)} = xy^{(mn+n)} + axy^{(mn)} + many^{(mn-1)}.$$

Si l'on élimine les m dérivées

$$y^{(n-1)},\quad y^{(2n-1)},\quad y^{(3n-1)},\ \cdots,\ y^{(mn-1)}$$

entre $(m+1)$ relations

$$L = 0,\quad L^{(n)} = 0,\quad L^{(2n)} = 0,\ \cdots,\ L^{(mn)} = 0,$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} z & z^{(n)} & z^{(2n)} & \cdots & z^{(mn-n)} & z^{(mn)} \\ -mn & an & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -(m-1)n & 2an & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(m-2)n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (m-1)an & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & man \end{vmatrix} = 0,$$

avec

$$y^{(n)} + ay = z. \tag{4}$$

L'équation (3), après développement du déterminant du type d'Escherich qui y figure, prend la forme simple {*cf.* [3], p. 17}

$$z^{(mn)} + \binom{m}{1} az^{(mn-n)} + \binom{m}{2} a^2 z^{(mn-2n)} + \cdots + a^m z = 0. \tag{5}$$

Si l'on porte dans (5) la valeur de z, définie par (4), on obtient l'équation

$$(6) \qquad y^{(mn+n)} + \binom{m+1}{1} a y^{(mn)} + \binom{m+2}{2} a^2 y^{(mn-n)} + \cdots + a^{m+1} y = 0,$$

dont l'équation caractéristique est

$$(7) \qquad (r^n + a)^{m+1} = 0.$$

En désignant par A_{pq} des constantes arbitraires et par r_ν les racines de l'équation

$$r^n + a = 0,$$

la solution générale de l'équation (6) s'écrit

$$(8) \qquad y = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (A_{0\nu} + A_{1\nu} x + A_{2\nu} x^2 + \cdots + A_{m\nu} x^m) e^{r_\nu x}.$$

A partir de (8), on peut trouver la solution générale de l'équation proposée (1), ce qui se fait en déterminant les constantes

$$(9) \qquad A_{pq}, \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots, m-1;\ q = 1, 2, 3, \cdots, n),$$

en fonctions des constantes

$$A_{m1},\ A_{m2},\ A_{m3},\ \cdots,\ A_{mn}$$

de manière que l'expression (8) satisfasse identiquement à l'équation (1).

La formation effective de la solution générale de l'équation (1) dépend de la résolution d'un système d'équations linéaires en constantes (9).

Резиме

О ЈЕДНОЈ LAPLACE-овој ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ

Д. С. МИТРИНОВИЋ

У овом чланку се наводи једна метода за интеграцију једначине (1). Та метода је заснована на подесној употреби сукцесивних извода диференцијалног полинома (2).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] A. R. Forsyth — W. Jacobsthal
Lehrbuch der Differentialgleichungen, zweite Auflage, Braunschweig, 1912, XXII+920 S.

[2] E. Kamke
Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, dritte Auflage, Leipzig, 1944, XXVI+660 S.

[3] D. S. Mitrinovitch
Remarques sur des déterminants du type d'Escherich (*Bulletin de la Société des mathématiciens et des physiciens de la R. P. de Macédoine*, t. 1, 1950, p. 5—20).