Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите
од Н Р Македонија, кн. 1, 1950
Bulletin de la Société des mathématiciens et des physiciens
de la R. P. de Macédoine, t. 1, 1950

O JEDNOJ DIFERENCIJALNOJ JEDNAČINI

D. S. MITRINOVIĆ i I. VIDAV

U časopisu *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*[1]) Mitrinović je postavio zadatak da se reši jednačina

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = \alpha \sin x, \tag{1}$$

gde je α proizvoljna konstanta. Do danas nije objavljeno rešenje ove jednačine u navedenom časopisu.

I. Rešenje D. S. Mitrinovića

Ako se u (1) stavi

$$x = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad y = \sqrt{\alpha}\,\rho,$$

gde su ρ i θ nove promenljive, dobija se

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 = \cos\theta. \tag{2}$$

Baveći se jednim opštijim pitanjem, Mitrinović[2]) je, 1936 godine, dao ovaj postupak za integraciju jednačine (2):

Stavljajući u (2)

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\xi}, \quad \rho = \frac{\eta}{\xi + 1},$$

---

[1]) *Videti:* Bd. 48, 1938, S. 2 (*kursiv*), Aufgabe 266.

[2]) *O integraciji jedne važne diferencijalne jednačine prvoga reda* (*Glas Srpske akademije nauka*, knjiga 173, 1936, str. 77—117; *videti* naročito str. 112—113).

dobija se

$$(3) \qquad \xi(1+\xi)\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 - 2\xi\eta\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 + \xi - 1 = 0.$$

Poslednja jednačina, smenom

$$\xi = \frac{dY}{dX}, \quad \eta = X\frac{dY}{dX} - Y, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = X,$$

postaje

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1-Y^2}{1+X^2},$$

odakle izlazi

$$2 \operatorname{arctg} X + \log\left|\frac{Y-1}{Y+1}\right| = C$$

(C = integraciona konstanta).

Ako se u poslednju jednačinu uvrsti

$$X = \frac{d\eta}{d\xi} = p, \quad Y = \xi p - \eta,$$

onda relacije

$$(4) \qquad 2 \operatorname{arc\,tg} p + \log\left|\frac{\xi p - \eta - 1}{\xi p - \eta + 1}\right| = C,$$

$$(5) \qquad \xi(1+\xi)p^2 - 2\xi\eta p + \eta^2 + \xi - 1 = 0,$$

gde je p parametar, definišu opšti integral jednačine (3).

Da bi se dobio opšti integral jednačine (2), treba u relacije (4) i (5) uvrstiti

$$(6) \qquad \xi = \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}, \quad \eta = \frac{\rho}{\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Na osnovu relacija (5) i (6) nalazi se:

$$p = \rho \pm \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{\cos\theta - \rho^2}.$$

Dalje je:

$$\xi p - \eta = -\rho \pm \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{\cos\theta - \rho^2}.$$

Prema tome, opšti integral jednačine (2) definisan je relacijom

$$(7)\quad 2\operatorname{arc\,tg}\left(\rho \pm \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{\cos\theta - \rho^2}\right)$$

$$+\log\left|\frac{1+\rho\mp\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{\cos\theta-\rho^2}}{1-\rho\pm\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{\cos\theta-\rho^2}}\right| = \text{Const.}$$

II. REŠENJE I. VIDAVA[1])

Prva rešitev diferencialne enačbe $y'^2 + y^2 = \alpha \sin x$.

Za $\alpha = 0$ je enačba trivialna. Če $\alpha \neq 0$, se lahko vzame, da je $\alpha = 1$. Ako iščemo rešitev enačbe v obliki $y = a + b \sin x$, dobimo za a in b naslednji enačbi:

$$a^2 + b^2 = 0, \quad 2ab = 1$$

torej

$$y = \pm\frac{1 \pm i}{2} \pm \frac{1 \mp i}{2}\sin x, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

to pa lahko pišemo

$$y = \frac{1+\sin x}{2}\cdot(\pm 1) + \frac{1-\sin x}{2}\cdot(\pm i).$$

To je partikularna rešitev. Na podlagi tega vpeljimo novi spremenljivki u in v na sledeči način:

$$(1')\quad \begin{aligned} y &= \frac{1+\sin x}{2}u + \frac{1-\sin x}{2}v, \\ y' &= \frac{\cos x}{2}u - \frac{\cos x}{2}v. \end{aligned}$$

---

[1]) *J. Vidav* je našao svoja rešenja 1944 godine ne znajući za rešenje *D. Mitrinovića* koje je napred izloženo.

Iz (1′) se dobi, če se odvod desne strani prve enačbe postavi enak desni strani druge enačbe

$$(2') \qquad \frac{1+\sin x}{2}\, u' + \frac{1-\sin x}{2}\, v' = 0.$$

Na drugi strani pa, če v prvotno diferencialno enačbo postavimo za y in y' vrednosti, ki jih dobimo iz (1′)

$$\frac{1+\sin x}{2}\, u^2 + \frac{1-\sin x}{2}\, v^2 = \sin x,$$

ali

$$\sin x = \frac{u^2+v^2}{2-u^2+v^2}.$$

Enačba (2′) se tedaj glasi

$$(1+v^2)\, u' + (1-u^2)\, v' = 0,$$

ali

$$\frac{du}{1-u^2} + \frac{dv}{1+v^2} = 0.$$

Spremenljivke so tukaj ločene, torej je

$$(3') \qquad \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u} + \operatorname{arc\,tg} v = \text{Konst.}$$

To je rešitev diferencialne enačbe, če se postavijo u in v vrednosti, ki jih dobimo iz enačbe (1′)

$$(4') \qquad \begin{aligned} u &= y + \frac{1-\sin x}{\cos x}\, y', \\ v &= y - \frac{1+\sin x}{\cos x}\, y' \end{aligned}$$

kjer je

$$y' = \sqrt{\sin x - y^2}.$$

Druga rešitev.

Če $\alpha \neq 0$, se lahko vzame $\alpha = 2i$. Potem je

$$\eta = 1 + i \sin x$$

partikularna rešitev zgornje enačbe. Torej je

$$y'^2 + y^2 = \eta'^2 + \eta^2.$$

Na podlagi te enačbe vpeljimo novo spremenljivko u na sledeči način

$$y = \eta \sin u + \eta' \cos u = \sin u + i \cos (u - x),$$

$$y' = \eta \cos u - \eta' \sin u = \cos u - i \sin (u - x),$$

torej je

$$(\eta \cos u - \eta' \sin u) u' + \eta' \sin u + \eta'' \cos u = \eta \cos u - \eta' \sin u,$$

ali

$$[\cos u - i \sin (u - x)] \frac{d(u - x)}{dx} + i \sin (u - x) = 0.$$

Če vpeljemo

$$v = u - x$$

in vzamemo x za odvisno spremenljivko, se diferencialna enačba glasi

$$i \sin v \frac{dx}{dv} + \cos x \cos v - \sin x \sin v - i \sin v = 0.$$

Z vpeljavo substitucije

$$t = e^{iv} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

sta spremenljivki v diferencialni enačbi ločljivi

$$2 i \sin v \frac{dt}{dv} + 1 - t^2 = 0.$$

Rešitev se glasi

$$\log \frac{t - 1}{t + 1} + i \log \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \text{Konst.}$$

III. POREDJENJE PRETHODNIH REZULTATA

U (4′) stavimo

$$x = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad y = \rho,$$

te se dobija

$$u = \rho - \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\rho}{d\theta},$$

$$v = \rho + \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\rho}{d\theta}$$

ili

$$u = \rho - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta}$$

$$v = \rho + \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta}.$$

Ako se poslednji izrazi uvrste u (3′), ima se

$$2 \operatorname{arc\,tg} \left(\rho + \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta}\right) + \log \left| \frac{1 + \rho - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta}}{1 - \rho + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta}} \right| = \text{Const.}$$

S obzirom na to da je

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm\sqrt{\cos\theta - \rho^2}$$

i da u relaciji (3′) treba uzeti

$$\log \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| \quad \text{mesto} \quad \log \frac{1 + u}{1 - u}$$

dolazi se do zaključka da je rezultat Vidava identičan rezultatu Mitrinovića.

Résumé

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Par

D. S. MITRINOVITCH et I. VIDAV

Dans le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker – Vereinigung*[1]) *Mitrinovitch* a proposé l'intégration de l'équation différentielle

$$(1) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = \alpha \sin x \qquad (\alpha = \text{Const}),$$

mais jusqu'à présent, dans le journal mentionné, n'est pas publiée une solution de l'équation (1).

Dans cette Note, on indique trois procédés[2]) à l'aide desquels on trouve que la solution générale de l'équation

$$(2) \qquad \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 = \cos\theta$$

est donnée par la relation

$$2 \operatorname{arc\,tg} \left(\rho \pm \sqrt{\cos\theta - \rho^2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}\right) + \log \left| \frac{1 + \rho \mp \sqrt{\cos\theta - \rho^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 - \rho \pm \sqrt{\cos\theta - \rho^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right| = \text{Const.}$$

Pour passer de l'équation (1) à l'équation (2), il reste à faire la substitution suivante

$$x = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad y = \sqrt{\alpha}\, \rho.$$

---

[1]) *Cf.* Bd. 48, 1938, S. 2 *(kursiv)*, Aufgabe 266.

[2]) Le premier de ces procédés est indiqué par *Mitrinovitch*. Voir aussi son article inséré dans le *Glas* de l'Académie serbe des sciences, 1936, p. 112—113. — Les deux autres procédés sont dûs à *Vidav*.