Билтен на Друштвото на математичарите и физичарите
од Н Р Македонија, кн. 1, 1950

Bulletin de la Société des mathématiciens et des physiciens
de la R. P. de Macédoine, t. 1, 1950

PRIMEDBE O DETERMINANTAMA ESCHERICH-OVA TIPA

DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ

1. Escherich[1]) je posmatrao determinantu oblika

$$(1) \qquad E \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$$

i pokazao da je njena vrednost:

$$(2) \qquad E \equiv a_0 x_1 x_2 \dots x_n + a_1 y_1 x_2 x_3 \dots x_n + \dots + a_k y_1 y_2 \dots y_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_n + \dots + a_n y_1 y_2 \dots y_n .$$

Uočimo sada determinantu reda $(n+1)$, Escherich-ova tipa, koja ima ovaj partikularni oblik:

$$(3) \qquad \Delta_n(x, \lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n \end{vmatrix}$$

---

[1]) Escherich, *Bestimmung einer Determinante (Monatshefte für Mathematik und Physik*, Bd. 3, 1892, S. 19-20).— Rezultat citiran prema knjizi: E. Pascal, *I Determinanti*, seconda edizione, Milano, Hoepli, 1923, p. 215.

gde su:

1° n ceo pozitivan broj;

2° λ proizvoljan parametar, nezavisan od x.

Elementi koji sačinjavaju matricu determinante $\Delta_n(x, \lambda)$ uživaju ove osobine;

1° Eksponenti

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

elemenata prve vrste

$$x^1, x^2, \ldots, x^n$$

jednaki su odgovarajućim elementima na glavnoj dijagonali;

2° Eksponenti

$$0, 1, 2, \ldots, n-1$$

elemenata prve vrste

$$x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$$

jednaki su odgovarajućim umanjenicima razlikâ

$$0-\lambda, 1-\lambda, \ldots, (n-1)-\lambda$$

što se nalaze na susednoj dijagonali.

2. Polazeći od navedenih činjenica, izvode se ovi identiteti:

$$(4) \qquad \Delta_n(x,\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 & \ldots & (-1)^{n-1}x^{n-1} & (-1)^n x^n \\ \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda-(n-1) & n \end{vmatrix},$$

$$(5) \qquad \frac{1}{n!}\Delta_n(x, \lambda) \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \binom{\lambda}{\nu} x^\nu,$$

gde je $\Delta_n(x, \lambda)$ definisano sa (3).

U slučaju kada je $|x| < 1$, aproksimativna formula za

$$(1+x)^{\lambda}$$

može se izraziti pomoću jedne determinante Escherich-ova tipa, tj.

$$(1+x)^{\lambda} \approx \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n \end{vmatrix}.$$

Prema relaciji (4), ima se, za $|x| < 1$, i ova aproksimativna formula:

$$(1-x)^{\lambda} \approx \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-(n-1) & n \end{vmatrix}.$$

Tako, na primer, za $n=3$ dobija se:

$$(1+x)^{\lambda} \approx \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^2 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \end{vmatrix},$$

$$(1-x)^{\lambda} \approx \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Posle diferenciranja po x, identitet (5) dovodi do novog identiteta:

$$\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2x & \dots & (n-1)x^{n-2} & nx^{n-1} \\ -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n \end{vmatrix}$$

$$\equiv \binom{\lambda}{1} + 2\binom{\lambda}{2}x + \dots + n\binom{\lambda}{n}x^{n-1},$$

tj. do identiteta:

$$\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} 1 & 2x & \dots & (n-1)^{n-2} & nx^{n-1} \\ 1-\lambda & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n \end{vmatrix}$$

$$\equiv 1 + \binom{\lambda-1}{1}x + \binom{\lambda-1}{2}x^2 + \dots + \binom{\lambda-1}{n-1}x^{n-1}.$$

Ako se smeni:

$$n \text{ sa } n+1\,,$$

$$\lambda \text{ sa } \lambda+1\,,$$

poslednji identitet postaje:

$$(6)\qquad \frac{1}{(n+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} & (n+1)x^n \\ -\lambda & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n+1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \binom{\lambda}{\nu} x^{\nu}.$$

Poređenjem identiteta (5) i (6), dobija se

$$\frac{1}{(n+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} & (n+1)x^n \\ -\lambda & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n+1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{n!}\,\Delta_n(x,\lambda).$$

Ako se isti postupak primeni na identitet (6), nalazi se:

$$\frac{1}{(n+2)!}\begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 3\cdot x & \dots & (n+2)\,(n+1)\,x^n \\ -\lambda & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n+2 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{n!}\,\Delta_n(x,\lambda).$$

Primenjujući navedeni postupak, ukupno k puta, na identitet (5), dobija se:

$$(7)\qquad \frac{k!}{(k+n)!}\begin{vmatrix} \binom{k}{k} & \binom{k+1}{k}x & \dots & \binom{k+n-1}{k}x^{n-1} & \binom{k+n}{k}x^n \\ -\lambda & k+1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & k+n \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{n!}\,\Delta_n(x,\lambda).$$

Poslednjem identitetu može se dati i ovaj oblik:

$$(8)\qquad \frac{1}{\binom{k+n}{n}}\begin{vmatrix} \binom{k}{k} & \binom{k+1}{n}x & \dots & \binom{k+n-1}{k}x^{n-1} & \binom{k+n}{k}x^n \\ -\lambda & k+1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & k+n \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n \end{vmatrix}.$$

Prema tome, *izraz što se nalazi na levoj strani identiteta* (8) *nezavisan je od parametra* k (k = ceo pozitivan broj).

Za $k=0$, relacija (8) ostaje takođe u važnosti.

4. Posmatrajmo sada determinantu

(9) $$E_n(x,\lambda,\mu) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ \lambda & \mu-(n-1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & \mu-(n-2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda-(n-1) & \mu \end{vmatrix}$$

Posle izvesnih transformacija, dobija se obrazac:

(10) $$E_n(x,\lambda,\mu) \equiv n! \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \frac{\binom{\lambda}{\nu}\binom{\mu}{n-\nu}}{\binom{n}{\nu}} x^\nu.$$

Za $\lambda=\mu=n$, dobija se

$$E_n(x,n,n) \equiv n! \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n-\nu}{n} x^\nu,$$

tj.

$$E_n(x,n,n) \equiv n! \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} x^\nu.$$

Polazeći od identiteta (10) i primenjujući na njega postupak iz § 3 ove rasprave, može se doći do identiteta koji će biti analogičan izvedenoj relaciji (8).

5. Laguerre-ovi polinomi koji su definisani izrazom[2])

$$L_n(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)!\, x^\nu$$

mogu se izraziti jednom determinantom Escherich-ova tipa, naime:

$$L_n(x) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}.$$

U matrici determinante $L_n(x)$ jednaki su jedinici svi elementi što se nalaze na dijagonali koja je susedna glavnoj dijagonali.

6. Pólya i Szegö naveli su ovaj rezultat:[3])

Ako su brojevi

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

različiti od nule, tada je identično po x

---

[2]) Videti na primer:

E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. 1, 3. Auflage, Leipzig, 1944, S. 433.

[3]) G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis*, Bd. 2, Berlin, 1925, S. 100, 302 (Aufgabe 11).

$$(11) \qquad a_0 \begin{vmatrix} x + \frac{a_1}{a_0} & \frac{a_2}{a_1} & \frac{a_3}{a_2} & \dots & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ -\frac{a_1}{a_0} & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{a_1} & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & x \end{vmatrix}$$

$$\equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Pólya i Szegö[4]) dokazuju navedeni rezultat na sledeći način:

„Man kann sich aus Stetigkeitsgründen auf den Fall beschränken, daß das Polynom

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

n *voneinander verschiedene Nullstellen besitzt. Irgendeine Nullstelle mit* x *bezeichnet und*

$$a_0 x^{n-1} = z_0,\ a_1 x^{n-2} = z_1,\ a_2 x^{n-3} = z_2,\ \dots,\ a_{n-2} x = z_{n-2},$$
$$a_{n-1} = z_{n-1}$$

gesetzt, genügen

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_{n-1}$$

dem homogenen System

[4]) Videti već citirano delo pod (3) na str. 302.

$$\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right) z_0 + \frac{a_2}{a_1} z_1 + \frac{a_3}{a_2} z_2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} z_{n-2}$$

$$+ \frac{a_n}{a_{n-1}} z_{n-1} = 0,$$

$$- \frac{a_1}{a_0} z_0 + x z_1 = 0,$$

$$- \frac{a_2}{a_1} z_1 + x z_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} z_{n-2} + x z_{n-1} = 0,$$

dessen Determinante = 0 *sein muß. Die vorgelegte Determinante ist also ein Polynom* nten *Grades in* x *mit dem höchsten Koeffizienten* 1, *das dieselben Nullstellen besitzt wie*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n."$$

Pokazaćemo da se identitet (11) može dokazati, polazeći od relacije (2), a da pri tome ne treba činiti nikakve druge pretpostavke osim da su koeficijenti

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

različiti od nule.

Zaista, prema (2), nalazi se:

$$\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right) x^{n-1} + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} x^{n-2} + \ldots + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} x^{n-k}$$

$$+ \ldots + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Posle množenja sa a_0 poslednji izraz postaje

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

što je i trebalo pokazati.

7. Ako se obrazac (11) primeni na izraz $(x+1)^n$, dobijaju se, respektivno za $n = 2k+1$ i $n = 2k$ (k = ceo broj $\geqq 1$) ova dva obrasca:

$$(x+1)^{2k+1} \equiv$$

$$\begin{vmatrix} x+\frac{2k+1}{1} & \frac{2k}{2} & \frac{2k-1}{3} & \cdots & \frac{k+1}{k+1} & \cdots & \frac{2}{2k} & \frac{1}{2k+1} \\ -\frac{2k+1}{1} & x & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2k}{2} & x & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & -\frac{2}{2k} & x \end{vmatrix},$$

$$(x+1)^{2k} \equiv$$

$$\begin{vmatrix} x+\frac{2k}{1} & \frac{2k-1}{2} & \frac{2k-2}{3} & \cdots & \frac{k+1}{k} & \frac{k}{k+1} & \cdots & \frac{1}{2k} \\ -\frac{2k}{1} & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{2k-1}{2} & x & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

8. *Nekoliko istoriskih podataka.* Na determinante Escherich-ova tipa naišli su prvi Günther[5]) i Laisant[6]), i pokazali su: da se svaki polinom po x može izraziti pomoću jedne specijalne determinante oblika (1).

---

[5]) S. Günther, *Lehrbuch der Determinanten-Theorie*, zweite Auflage, Erlangen, 1877, S. 204.

[6]) Laisant, *Sur un déterminant remarquable* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 17, 1889, p. 104—107).

Posle Esherich-a determinantama tipa (1) bavio se Bourlet[7]), koji je, ne citirajući Escherich-ov identitet (2), naveo ovaj interesantan obrazac:

$$\begin{vmatrix} n!\,a_0 & (n-1)!\,a_1 & (n-2)!\,a_2 & \dots & 2!\,a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(n-2) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\equiv n!\,(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n).$$

---

[7]) C. Bourlet, *Sur un déterminant remarquable* (*Nouvelles Annales de mathématiques*, troisième série, t. 16, 1897, p. 369–373).

Résumé

REMARQUES SUR DES DÉTERMINANTS DU TYPE D'ESCHERICH*)

Par
D. S. MITRINOVITCH

1. Escherich[1]) a considéré le déterminant (1) et a calculé sa valeur qui est donnée par la formule (2).

Dans cette Note, on envisage le déterminant

$$\Delta_n(x,\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n \end{vmatrix}$$

avec

n = nombre naturel,
λ = paramètre arbitraire, indépendant de x.

La matrice du déterminant $\Delta_n(x, \lambda)$ met en évidence la régularité intéressante qui existe parmi ses éléments.

On obtient l'identité suivante:

$$\frac{1}{n!}\Delta_n(x,\lambda) \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \binom{\lambda}{\nu} x^\nu,$$

où $\Delta_n(x, \lambda)$ est défini plus haut.

Dans le cas où $|x| < 1$, on fournit la formule approximative suivante:

---

*) Les formules numérotées par chiffres arabes se rapportent au texte écrit en langue serbe.

[1]) *Bestimmung einer Determinante (Monatshefte für Mathematik und Physik*, Bd. 3, 1892, S. 19).

$$(1+x)^{\lambda} \approx \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n \end{vmatrix}.$$

En désignant par k ($\geqq 0$) un entier arbitraire, on trouve l'identité :

$$\frac{1}{\binom{n+k}{n}} \begin{vmatrix} \binom{k}{k} & \binom{k+1}{k} x & \dots & \binom{k+n-1}{k} x^{n-1} & \binom{k+n}{k} x^n \\ -\lambda & k+1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & k+n \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \\ -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1)-\lambda & n \end{vmatrix}.$$

2. Le déterminant (9), généralisant $\Delta_n(x, \lambda)$, a la valeur suivante :

$$E_n(x,\lambda,\mu) \equiv n! \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^{\nu} \frac{\binom{\lambda}{\nu}\binom{\mu}{n-\nu}}{\binom{n}{\nu}} x^{\nu}.$$

On en tire :

$$E_n(x, n, \mu) \equiv n! \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{\mu}{n-\nu} x^\nu,$$

$$E_n(x, \lambda, n) \equiv n! \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{\lambda}{\nu} x^\nu,$$

$$E_n(x, n, n) \equiv n! \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} x^\nu.$$

3. Les polynômes de Laguerre, définis par

$$L_n(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-\nu)!\, x^\nu,$$

s'expriment au moyen du déterminant suivant:

$$L_n(x) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n \end{vmatrix},$$

qui est aussi du type d'Escherich.

4 À l'aide de la formule (2) on démontre l'identité (11), indiquée par Pólya et Szegö[1]), sous la seule condition que tous les coefficients

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

soient différents de zéro.

En utilisant la relation (11), on obtient la formule (n = entier positif):

---

[1]) G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. 2, Berlin, 1925, S. 100, 302 (Aufgabe 11).

$$(x+1)^n \equiv$$

$$\begin{vmatrix} x+\frac{n}{1} & \frac{n-1}{2} & \frac{n-2}{3} & \dots & \frac{2}{n-1} & \frac{1}{n} \\ -\frac{n}{1} & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{2} & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2}{n-1} & x \end{vmatrix}$$

dans laquelle intervient la matrice où les éléments se forment d'après une loi intéressante et facile à constater.