SUR UN PROCÉDÉ FOURNISSANT DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES INTÉGRABLES D'UN TYPE ASSIGNÉ D'AVANCE*)

Par

D. S. MITRINOVITCH

1. La troisième partie du premier tome (intitulée *Einzel-Differentialgleichungen*) du traité de *Kamke* [1] contient plus de 1600 équations différentielles ordinaires, rangées dans un ordre lexicographique et accompagnées de solutions, de remarques et de bibliographie relative à chaque équation envisagée. Ce recueil d'équations a rendu déjà de nombreux services, les trois éditions allemandes et une américaine montrent le vif intérêt que cette oeuvre a provoqué à partir de 1942, époque de sa première édition allemande.

Kamke et *Willers* [2] ont fait appel aux chercheurs pour collaboration, en vue de compléter le recueel de *Kamke.* Cette étude, qui se justifie par le fait indiqué, est rédigée dans le but de présenter une réponse à cet appel et de combler quelques lacunes du recueil mentionné.

Les équations différentielles dont il sera particulièrement question (au § 4 et suivants) sont du type

$$y'' + (ae^{sx} + b)\, y' + (Ae^{2sx} + Be^{sx} + C)\, y = 0.$$

Ce type d'équations (pour $s = 1$) a été considéré par *Görtler* [3, S. 233, Gl. 4a] (voir de même [1, S. 641, Gl. 2·63a]), ainsi que certains cas particuliers par *Craig* [1, S. 422, Gl. 2·90], *Conte* [4] (voir de même [1, S. 641, Gl. 2·37 b]), *Morris-Brown* [1, S. 418, Gl. 2·63], *Kamke* [1, S. 412, Gl. 2·33, Gl. 2·34] et *Görtler* [3, S. 233, Gl. (4)].

---

*) Le nombre entre parenthèses indique le numéro d'ordre de l'Index bibliographique. Les indications suivantes, par exemple, *S. 231* signifient la page, *Gl.* avec un nombre — le numéro de l'équation citée.

Au § 4 nous montrerons que tous ces cas particuliers dérivent d'une source commune et aux §§ 5 et 6 nous les traiterons en détail, tout en complétant la liste des cas intégrables de ce type d'équations différentielles.

2. Tous les cas intégrables par quadrature, considérés ici de ce type d'équations, peuvent être obtenus par élimination successive des fonctions inconnues d'un système linéaire d'équations du premier ordre, par suite leur intégration se ramène à l'intégration successive de telles équations.

Le procédé en question consiste en ce qui suit. Pour fixer les idées, partons du système d'équations à trois inconnues suivant

$$f_1(x)\,y' + f_2(x)\,y = z,$$

$$g_1(x)\,z' + g_2(x)\,z = u,$$

$$h_1(x)\,u' + h_2(x)\,u = h(x).$$

En éliminant z et u, et en choisissant convenablement les fonctions y figurant, on peut former des équations linéaires du troisième ordre

$$\varphi_0(x)\,y''' + \varphi_1(x)\,y'' + \varphi_2(x)\,y' + \varphi_3(x)\,y = h(x),$$

dont les coefficients φ_k auront des formes données d'avance. L'équation du troisième ordre, ainsi formée, sera intégrable, puisqu'il en est de même du système de départ.

Nous ne considérerons dans cette Note que les systèmes de deux équations, en faisant remarquer que l'on peut obtenir de même des résultats intéressants en prenant comme point de départ, par exemple, le système

$$f(x)\,y'' + g(x)\,y = z,$$

$$z' + h(x)\,z = 0,$$

ou bien le système

$$f(x)\,y' + g(x)\,y = z,$$

$$z'' + h(x)\,z = 0.$$

Nous reviendrons sur ces questions dans une autre étude qui paraîtra en langue serbe [5].

3. En partant du système intégrable

$$f(x)y' + g(x)y = z,$$
$$z' + h(x)z = 0,$$

et en éliminant la fonction z, on obtient la proposition suivante:

L'équation différentielle

$$fy'' + (f' + g + fh)y' + (g' + gh)y = 0,$$

où

$$f = f(x) \neq 0, \quad g = g(x), \quad h = h(x)$$

est intégrable.

La fonction

$$y_1 = \exp\left(-\int \frac{g}{f}\,dx\right)$$

est une solution particulière de cette équation.

Pour $f(x) \equiv 1$, cette équation devient

$$y'' + (g + h)y' + (g' + gh)y = 0$$

et représente, précisément, l'équation indiquée par *Görtler* [3, S. 233, Gl. (6)] (voir de même [1, S. 643, Gl. 2·77a]).

Si l'on pose $g(x) \equiv 1$, elle se réduit à

$$fy'' + (1 + f' + fh)y' + hy = 0,$$

qui représente, de même, un type d'équations considéré par *Görtler* [3, S. 234, Gl. (14)] (voir de même [1, S. 657, Gl. 2·444 a]).

En choisissant convenablement les fonctions f, g, h, dont nous disposons à volonté, notre proposition peut servir à former des équations d'un type donné à l'avance, comme nous le montrerons au § 4.

En outre, par le procédé indiqué, l'on peut obtenir, par exemple, des cas d'intégrabilité des équations de l'un des types suivants

$$y'' + (ax + b)y' + (Ax^2 + Bx + C)y = 0,$$
$$(ax^2 + bx + c)y'' + (Ax + B)y' + y = 0,$$
$$y'' + (ax^2 + bx + c)y' + (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)y = 0,$$
$$y'' + (a\sin x + b\cos x)y' + (A\sin^2 x + B\sin x\cos x +$$
$$+ C\cos^2 x + D\sin x + E\cos x + F)y = 0,$$

$a, b, \ldots$ et $A, B, \ldots$ étant des constantes qui satisfont à certaines conditions que l'on obtient par application du procédé en question.

4. Partons du système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} y' + (\lambda_1 e^{sx} + \mu_1) y &= z, \\ z' + (\lambda_2 e^{sx} + \mu_2) z &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ et $s \neq 0$ sont des constantes. Par élimination de z, on est conduit à l'équation différentielle du second ordre

$$\begin{aligned} y'' + [(\lambda_1 + \lambda_2) e^{sx} + (\mu_1 + \mu_2)] y' + \\ + [\lambda_1 \lambda_2 e^{2sx} + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s) e^{sx} + \mu_1 \mu_2] y = 0, \end{aligned}$$

qui est du type

$$y'' + (a e^{sx} + b) y' + (A e^{2sx} + B e^{sx} + C) y = 0. \tag{2}$$

En comparant ces deux équations on voit que l'équation (2) se ramène au système (1) toutes les fois que

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 = a, \qquad & \mu_1 + \mu_2 = b, \\ \lambda_1 \lambda_2 = A, \qquad & \mu_1 \mu_2 = C, \\ \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s &= B. \end{aligned} \tag{3}$$

Il s'ensuit que les coefficients a, b, A, B, C et s doivent être liés par l'une des relations que l'on obtient lorsqu'on remplace dans (3) λ_1, λ_2 et μ_1, μ_2 respectivement par l'une des deux racines des équations

$$\lambda^2 - a\lambda + A = 0 \quad \text{et} \quad \mu^2 - b\mu + C = 0.$$

En posant, pour abréger,

$$R_1 = +\sqrt{a^2 - 4A} \quad \text{et} \quad R_2 = +\sqrt{b^2 - 4C} \tag{4}$$

l'on obtient, ainsi, suivant le choix des signes de R_1 et R_2 quatre conditions différentes de la forme

$$s(a \pm R_1) + ab \pm R_1 R_2 = 2B. \tag{5}$$

Par suite, lorsque l'une des quatre conditions (5) est remplie, l'équation (3) est réductible (au sens de *Painlevé* [6]) à un système de la forme (1).

A titre d'exemple, considérons l'équation

$$y'' + (4 e^{sx} + 7) y' + (3 e^{2sx} + 5 e^{sx} + 10) y = 0,$$

D'après les conditions (5) cette équation sera réductible au système (1) pour les quatre valeurs suivantes de s

$$s=-12, \quad =-6, \quad =-4, \quad =-2.$$

5. *Görtler* [3, S. 233, Gl. 4 a)] (voir de même [1, S. 641, Gl. 2·63 a]) a montré que l'équation (2) s'intègre par quadrature lorsque les coefficients A, B, C sont de la forme

$$A=-\alpha(a+\alpha), \qquad B=-a\beta-b\alpha-2\alpha\beta-\alpha,$$
$$C=-\beta(b+\beta),$$

α et β étant deux paramètres arbitraires, et que dans ce cas,

$$y_1=exp(\alpha e^x+\beta x)$$

est une solution particulière de l'équation (2).

Afin d'adapter la forme des conditions (5) à celle de *Görtler*, posons

$$A=-\alpha(a+\alpha) \text{ et } C=-\beta(b+\beta).$$

Dans ce cas, d'après (4),

$$R_1=a+2\alpha \text{ et } R_2=b+2\beta,$$

et, par suite, les quatre conditions (5) deviennent, respectivement,

$$s(a+\alpha)-2\alpha\beta-a\beta-b\alpha=B,$$
$$s(a+\alpha)+ab+a\beta+b\alpha+2\alpha\beta=B,$$
$$-s\alpha+ab+a\beta+b\alpha+2\alpha\beta=B,$$
$$-s\alpha-a\beta-b\alpha-2\alpha\beta=B.$$

Ainsi, d'après ce qui précède, on a le résultat suivant:

Les coefficients A et C de l'équation

$$y''+(ae^{sx}+b)y'+(Ae^{2sx}+Be^{sx}+C)y=0$$

étant de la forme

$$A=-\alpha(a+\alpha) \quad \text{et} \quad C=-\beta(b+\beta),$$

α et β étant deux paramètres arbitraires, cette équation est réductible

1° — au système

$$y'+[(a+\alpha)e^{sx}+(b+\beta)]y=z,$$
$$z'-(\alpha e^{sx}+\beta)z=0,$$

lorsque

$$B = s(a+\alpha) - 2\alpha\beta - a\beta - b\alpha;$$

2^0 — au système

$$y' + [(a+\alpha)e^{sx} - \beta]y = z,$$

$$z' + [-\alpha e^{sx} + (b+\beta)]z = 0,$$

lorsque

$$B = s(a+\alpha) + ab + a\beta + b\alpha + 2\alpha\beta;$$

3^0 — au système

$$y' + [-\alpha e^{sx} + (b+\beta)]y = z,$$

$$z' + [(a+\alpha)e^{sx} - \beta]z = 0,$$

lorsque

$$B = -s\alpha + ab + a\beta + b\alpha + 2\alpha\beta;$$

4^0 — au système

$$y' - (\alpha e^{sx} + \beta)y = z,$$

$$z' + [(a+\alpha)e^{sx} + (b+\beta)]z = 0,$$

lorsque

$$B = -s\alpha - a\beta - b\alpha - 2\alpha\beta.$$

Ce dernier cas, pour $s = 1$, se réduit à celui de *Görtler*, mentionné au début de ce paragraphe.

6. Énumerons encore brièvement les cas mentionnés au début et qui appartiennent au type d'équations différentielles (2) réductibles au système (1).

a) L'équation de *Craig* [1, S. 422, Gl. 2·90]

$$a^2 y'' + a(a^2 - 2be^{-ax})y' + b^2 e^{-2ax} y = 0$$

appartient au type d'équations (2) satisfaisant à la condition 1^0 et, par suite, se réduit au système

$$ay' - (be^{-ax} - a^2)y = az,$$

$$az' - be^{-ax}z = 0.$$

b) L'équation de *Conte* [4] (voir de même [1, S. 641, Gl. 2·37 b])

$$y'' + ay' + be^{2ax}y = 0$$

appartient de même au type (2) qui satisfait à la condition 1°, et se réduit au système

$$y'+(\sqrt{-b}\,e^{ax}+a)y=z,$$
$$z'-\sqrt{-b}\,e^{ax}z=0.$$

c) L'équation de *Morris-Brown* [1, S. 418, Gl. 2·63]

$$y''-(2e^x+1)y'+e^{2x}y=0$$

se réduit à l'équation de *Craig* pour $a=b=-1$.

d) Les deux équations de *Kamke* [1, S. 412, Gl. 2·33 et Gl. 2·34]

$$y''+y'+e^{-2x}y=0 \quad \text{et} \quad y''-y'+e^{2x}y=0$$

appartiennent de même au type (2), satisfaisant à la condition 1°, et sont, par suite, réductibles, la première au système

$$y'+ie^{-x}y=z, \qquad (i=\sqrt{-1})$$
$$z'+(-ie^{-x}+1)z=0,$$

et la seconde au système

$$y'+ie^{x}y=z, \qquad (i=\sqrt{-1})$$
$$z'-(ie^{x}+1)z=0.$$

e) *Görtler* [3, S. 233, Gl. (4)] a de même considéré l'équation (2) lorsque $A=0$, (pour $s=1$), c. à d. l'équation du type

$$y''+(ae^{sx}+b)y'+(Be^{sx}+C)y=0, \tag{6}$$

ayant donné comme cas d'intégrabilité les conditions

$$B=a(s+b+\beta) \quad \text{et} \quad C=-\beta(b+\beta), \quad (s=1).$$

Étant donné que dans ce cas

$$A=-\alpha(a+\alpha)=0,$$

on peut prendre $\alpha=0$ (en prenant $\alpha=-a$ on retombe forcément sur les mêmes conditions), et l'on obtient ainsi les quatre cas d'intégrabilité de l'équation (6), à savoir

1° $B=a(s-\beta)$, 2° $B=a(s+b+\beta)$,

3° $B=a(b+\beta)$, 4° $B=-a\beta$,

C devant être dans tous ces quatre cas de la forme

$$C = -\beta\,(b+\beta).$$

Le cas considéré par *Görtler* se réduit à 2° avec $s=1$.

f) Remarquons, enfin, que l'équation [1, S. 641, Gl. 2·37 a], [3, S. 233, Gl. (3)] du type

$$y''+by'+(Be^{x}+C)\,y=0,$$

ainsi que l'équation du type [1, S. 403, Gl. 2·17]

$$y''+Be^{sx}\,y=0,$$

ne satisfont aux quatre conditions précédentes que lorsque $B=0$, étant donné que, dans les deux équations, $a=0$. Ces deux équations ne sont, donc, pas réductibles dans le sens défini précédemment, que lorsqu'elles se réduisent aux équations différentielles aux coefficients constants.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] Kamke, E. — Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen, III. Auflage, Leipzig, 1944.

[2] Kamke, E. et Willers, — *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, *22*, S. 233 (1942).

[3] Görtler, H. — Ergänzungen zu Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, *22*, S. 233 (1942).

[4] Conte, L. — Sull'integrazione delle equazioni differentiali lineari del secondo ordine, *Publ. math. de l'Univ. de Belgrade*, *6–7*, p. 119–1 5 (1937/38).

[5] Mitrinovitch, D. — *Annuaire de la Faculté de Philosophie de l'Univ. de Skopje*, Section des sciences naturelles, *2*, p. 209–240 (1949).

[6] Painlevé, P. — Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm, Paris, 1897, p. 487.