ÉLASTICITÉ. — *Mise en correspondance d'un problème non résolu de la théorie de l'Élasticité avec un problème résolu par Darboux et Drach.* Note de M. **Dragoslav S. Mitrinovitch**, présentée par M. Jacques Hadamard.

1. V. V. Sokolovsky, C. Truesdell et d'autres (¹) ont étudié un problème, qui rentre dans la théorie des couches élastiques, se ramenant, en dernière analyse, à l'équation différentielle indéterminée

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dz^2}+(n^2-1)\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dz^2}=0, \tag{1}$$

avec $n =$ entier positif, $F=F(z)$, $f=f(z)$.

Sokolovsky et Truesdell ont indiqué quelques cas particuliers de l'intégration par quadratures de l'équation (1). Dans cette Note, nous allons montrer que le problème en question se présente comme un cas particulier de certains résultats généraux dus à Darboux, Drach et à nous-même.

2. Au lieu de l'équation (1), on considérera le système

$$\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dz^2}=\Phi(z), \tag{2}$$

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dz^2}=(1-n^2)\Phi(z), \tag{3}$$

où Φ est une fonction arbitraire de z; et, plus généralement, l'équation

$$\frac{d^2H}{dz^2}=h\Phi(z)H \qquad (h \text{ indépendant de } z) \tag{4}$$

dépendant du paramètre arbitraire h.

Par suite, l'intégration (1) est ramenée à un problème plus général consistant dans la formation d'équations du type (4) intégrables par quadratures pour h arbitraire.

3. Lorsque $a(x)\neq$ const. est une fonction donnée arbitraire, supposée continue et dérivable, l'équation (4), à l'aide des substitutions (²)

$$z=a(x), \qquad H=\eta\sqrt{a'(x)}, \tag{5}$$

se transforme en

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=\left[h\Phi(a)\,a'^2+\frac{1}{4}\left(\frac{a''}{a'}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{a''}{a'}\right)'\right]\eta. \tag{6}$$

(¹) C. Truesdell, *Transactions of the American Mathematical Society*, **58**, 1945, p. 96-166; **61**, 1947, p. 128-133.

(²) Les accents désignent des dérivées prises par rapport à x.

En choisissant $a(x)$ sous la condition que

$$\Phi(a)\, a'^2 = 1, \tag{7}$$

l'équation (6) devient

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = [\varphi(x) + h]\,\eta \tag{8}$$

avec

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{a''}{a'}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a''}{a'}\right)', \tag{9}$$

où $a(x)$ est définie par (7).

Proposition. — *Si l'équation* (4) *est intégrable pour une forme donnée de* $\Phi(z)$, *h demeurant arbitraire, l'équation* (8) *avec* $\varphi(x)$ *correspondante sera de même intégrable pour h arbitraire, et inversement.*

A l'aide de (5) on passe facilement de l'équation (4) à l'équation (8), où $\varphi(x)$ est défini par (7) et (9).

Inversement, pour passer d'une équation (8) à (4), il faut faire le changement ([3])

$$z = \int \frac{dx}{\omega^2(x)}, \qquad \eta = \mathrm{H}\,\omega(x),$$

où $\omega(x)$ désigne une solution de l'équation (8) pour $h = 0$ qui est, par supposition, pour $\varphi(x)$ donné, intégrable, h étant quelconque. La fonction $\Phi(z)$ est définie par les relations

$$\Phi(z) = \omega^4(x), \qquad z = \int \frac{dx}{\omega^2(x)}.$$

Or, nous avons mis en évidence la possibilité d'utiliser les résultats de Darboux ([4]), de Drach ([5]) et de nous-même ([6]) sur l'équation (8), ce qui aura pour effet une formation systématique de suites illimitées de cas de réduction aux quadratures de l'équation du problème d'élasticité considéré par Sokolovsky et Truesdell.

([3]) Pour faciliter l'écriture, on considère ce changement au lieu de

$$z = \mathrm{C}_1 \int \frac{dx}{\omega^2} + \mathrm{C}_2, \qquad \mathrm{H} = \frac{\sqrt{c_1}}{\omega}\,\eta,$$

avec $\mathrm{C} \neq 0$, C_2 constantes arbitraires.

([4]) *Théorie générale des surfaces*, **2**, 1915, p. 210.

([5]) *Comptes rendus*, **168**, 1919, p. 47-50 et p. 337-340.

([6]) D. S. Mitrinovitch, *Bulletin de l'Académie serbe des Sciences*, **6**, 1939, p. 121-156.