DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ

O DIFERENCIJALNOJ JEDNAČINI JEDNOG VAŽNOG PROBLEMA TEORIJE ELASTICITETA

Posvećeno Profesoru
E. Kamke-u
povodom šezdesetogodišnjice njegova života

1. Predmet ove rasprave je Neményi-Truesdell-ova diferencijalna jednačina

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{F}\,\frac{d^2F}{dz^2} + (n^2-1)\,\frac{1}{f}\,\frac{d^2f}{dz^2} = 0\,,$$

gde je n ceo pozitivan broj i gde su F i f dve funkcije promenljive z koje treba odrediti.

Neodređena jednačina (1) je osnovna jednačina opšteg problema[1] ravnoteže iz membranske teorije ljuske koja ima oblik rotacione površine. S obzirom na to da je integracija jednačine (1) pomoću kvadratura ostvarena do sada samo u veoma malom broju slučajeva, navedeni problem rešen je takođe samo u nekoliko partikularnih slučajeva, kao što se konstatuje iz obimne literature[2] o ovom pitanju.

U ovoj raspravi daćemo jednu metodu na osnovu koje je mogućno konstruisati beskrajan niz rešenja F_ν, f_ν *jednačine* (1).

2. Umesto jednačine (1) posmatraćemo sistem od dve linearne diferencijalne jednačine

---

1) *Videti* [6], [10], [11]. Brojevi između zagrada [ ] upućuju na literaturu koja je priložena iza izvoda na francuskom.

2) *Videti* [13], [14] gde je Truesdell analizirao rezultate do kojih su došli: E. Meissner, H. Reissner, P. Neményi, E. Reissner, V. Sokolovsky i drugi. Truesdell-ovoj bibliografiji treba dodati rasprave: [12], [16], kao i druge najnovijeg datuma. Takođe *videti:* [17], str. 589—591 i [18].

$$\frac{d^2 f}{d z^2} = \Phi(z) f,$$

(2)

$$\frac{d^2 F}{d z^2} = (1 - n^2)\Phi(z) F,$$

gde je Φ proizvoljna funkcija promenljive z, ili opštije jednačinu

$$\frac{d^2 H}{d z^2} = h\Phi(z) H, \tag{3}$$

u kojoj se pojavljuje proizvoljan parametar h, nezavisan od z.

Prema tome, integracija Neményi-Truesdell-ove jednačine svodi se na obrazovanje jednačina oblika (3) koje će biti integrabilne za ma kakvo h.

3. Ako je $a(x)$ $(a \neq \text{const})$ jedna proizvoljna neprekidna funkcija od x koja ima tri prva izvoda, jednačina (3), smenom promenljivih

$$z = a(x), \qquad H = \eta\sqrt{a'(x)}, \tag{4}$$

dobija oblik

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \left[h\Phi(a) a'^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{a''}{a'}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a''}{a'}\right)'\right]\eta, \tag{5}$$

gde su a', a'', a''' izvodi po x.

Izaberemo li funkciju $a(x)$ tako da je

$$\Phi(a) a'^2 = 1, \tag{6}$$

jednačina (5) postaje

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{a''}{a'}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a''}{a'}\right)' + h\right]\eta, \tag{7}$$

tj. dobija oblik

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \left[\varphi(x) + h\right], \tag{8}$$

gde je

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{a''}{a'}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a''}{a'}\right)'. \tag{9}$$

Na osnovu gornjeg rezultata može se formulisati:

S t a v I. *Ako je diferencijalna jednačina* (3) *integrabilna pomoću kvadratura za proizvoljnu vrednost parametra* h, *tada je diferencijalna jednačina* (8) *takođe integrabilna za proizvoljnu vrednost istog parametra. Funkcija* $\varphi(x)$ *je određena relacijama* (6) *i* (9).

4 Kao što smo napred pokazali, sa jednačine (3), smenom promenljivih (4), prelazi se na jednačinu (8), gde se funkcija $\varphi(x)$ izračunava na osnovu relacija (6) i (9).

Na pitanje o tome da li je mogućno preći sa jednačine (8), pod pretpostavkom da je ona integrabilna za dato $\varphi(x)$ i ma kakvo h, na jednačinu oblika (3), dobija se afirmativan odgovor, što pretstavlja rezultat koji ima ne samo teoriski već i praktični značaj.

Da bi se našla ona supstitucija koja transformuje jednačinu (8), za dato $\varphi(x)$ i ma kakvo h, u jednačina (3), treba poći od relacije (9). Ako se tu stavi

$$\frac{a''}{a'} = -2\frac{\omega'}{\omega} \tag{10}$$

$$\left(\omega = \omega(x), \quad \omega \neq \text{const.}\right),$$

dobija se jednačina

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \varphi(x)\,\omega. \tag{11}$$

Od bitnog je značaja činjenica što jednačina za određivanje funkcije $\omega(x)$, odnosno $a(x)$, ima oblik jednačine (8) za $h=0$.

Na osnovu izloženog može se formulisati stav obrnut stavu I, a koji glasi:

S t a v II. *Integrabilnost pomoću kvadratura jednačine* (8), *za dati oblik funkcije* $\varphi(x)$ *i proizvoljno* h, *povlači za sobom integrabilnost jednačina* (11) *i* (10) *za* h = 0, *kao i integrabilnost jednačine* (3) *za proizvoljno* h, *gde je funkcija* $\Phi(z)$ *definisana relacijama*

$$\Phi(z) = \frac{1}{\left(\dfrac{da}{dx}\right)^2}, \qquad z = a(x).$$

5. Efektivno prelaženje sa jedne integrabilne jednačine oblika (8) na jednačinu (3) sastoji se u ovome. Neka je $\omega(x)$

jedno rešenje jednačine (11), tj. jednačine (8) za $h=0$ koja je integrabilna, prema pretpostavci, za proizvoljno h. Iz relacije (10) se nalazi

$$a(x)=C_1\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\omega^2}+C_2,$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante, x_0 jedna numerička konstanta podesno izabrana.

Prema (4), opšte rešenje jednačine (3), za proizvoljno h, određeno je relacijom

$$H=\frac{\sqrt{C_1}}{\omega}\eta, \tag{12}$$

gde je η opšte rešenje jednačine (8) za h proizvoljno.

Funkcija $\Phi(z)$ određuje se pomoću relacija

$$\Phi(z)=\frac{\omega^4}{C_1^2}, \qquad z=C_1\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\omega^2}+C_2. \tag{13}$$

Važna je činjenica da se u funkciji $\Phi(z)$ pojavljuju tri proizvoljne konstante.

Zaista, neka je izraz

$$\omega=K_1\,\omega_1(x)+K_2\,\omega_2(x)$$

opšte rešenje jednačine (11). U tom izrazu sa K_1, K_2 označili smo dve integracione konstante; sa ω_1, ω_2 dva linearno nezavisna partikularna rešenja jednačine (11). Tada se može napisati:

$$\Phi(z)=\left(\frac{K_1}{\sqrt{C_1}}\,\omega_1+\frac{K_2}{\sqrt{C_1}}\,\omega_2\right)^4,\qquad z=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\left(\frac{K_1}{\sqrt{C_1}}\,\omega_1+\frac{K_2}{\sqrt{C_1}}\,\omega_2\right)^2},$$

što pokazuje da se tri konstante C_1, K_1, K_2 mogu skupiti u dve. Treća konstanta je C_2.

U opštem rešenju diferencijalne jednačine (3) pojavljuju se još dve nove proizvoljne konstante, tako da Neményi-Truesdell-ova jednačina (1) ima za rešenje skup od dve funkcije F i f u kojima se javlja sedam proizvoljnih konstanata, tj. funkcije F i f su oblika

$$F=A_1\,\Theta_1(z, K_1, K_2, K_3)+A_2\,\Theta_2(z, K_1, K_2, K_3),$$

$$f=A_3\,\Theta_3(z, K_1, K_2, K_3)+A_4\,\Theta_4(z, K_1, K_2, K_3).$$

Sa K_1, K_2, K_3 smo označili konstante koje se uvlače preko $a(x)$ i $\omega(x)$; sa A_1, A_2, A_3, A_4 konstante koje se javljaju prilikom integracije jednačina (2); sa $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ funkcije koje se mogu odrediti kada je data funkcija $\varphi(x)$

Ako se u (12) i (13), radi uprošćavanja, stavi

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0,$$

dobija se ovaj rezultat:

Stav III. *Diferencijalna jednačina* (8), *ako je integrabilna za* h *proizvoljno, svodi se, smenom promenljivih*

$$\eta = H\omega, \quad z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\omega^2}, \tag{14}$$

gde je $\omega(x)$ *jedno rešenje jednačine* (8) *za* $h = 0$, *na jednačinu* (3) *u kojoj je* h *proizvoljno, dok je funkcija* $\Phi(z)$ *definisana relacijama*

$$\Phi(z) = \omega^4(x), \quad z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\omega^2}. \tag{15}$$

Opšte rešenje jednačine (3) *prikazano je relacijama*

$$H = \frac{\eta}{\omega}, \quad z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\omega^2}, \tag{16}$$

gde je $\eta(x)$ *opšte rešenje jednačine* (8) *za* h *proizvoljno.*

6. Pokazaćemo sada da doista transformacija (14) izvršena u jednačini (8) daje jednačinu (3).

Iz (14) sleduje

$$\frac{d\eta}{dx} = \omega \frac{dH}{dx} + H\omega'(x). \tag{17}$$

Budući da je

$$dx = \omega^2 dz, \tag{18}$$

jednačina (17) postaje

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\omega} \frac{dH}{dz} + H\omega'.$$

Posle diferenciranja i korišćenja relacije (18), poslednja relacija dovodi do

$$(19) \qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{1}{\omega^3}\frac{d^2 H}{dz^2} + H\omega''.$$

Na osnovu (14) i (19), jednačina (8), iza izvršenih transformacija, postaje

$$(20) \qquad \frac{d^2 H}{dz^2} = h\,\omega^4(x)\,H + \omega^3(x)\Big[\,\omega''(x) - \omega(x)\,\varphi(x)\Big]H.$$

Ako se želi da poslednja jednačina ima oblik

$$(21) \qquad \frac{d^2 H}{dz^2} = h\,\Phi(z)\,H,$$

mora postojati uslov

$$\omega''(x) - \omega(x)\,\varphi(x) = 0,$$

što pretstavlja jednačinu (8) za $h = 0$.

Time smo pokazali:

1° da je stav III zaista tačan;

2° da se smenom (14), gde je $\omega(x)$ proizvoljna funkcija od x, jednačina (8) transformuje u jednačinu

$$(22) \qquad \frac{d^2 H}{dz^2} = \Big[h\,\Phi(z) + \Psi(z)\Big]H,$$

u kojoj su funkcije Φ i Ψ definisane obrascima

$$\Phi(z) = \omega^4(x),$$

$$\Psi(z) = \omega^3(x)\Big[\,\omega''(x) - \omega(x)\,\varphi(x)\,\Big],$$

gde je x određeno relacijom

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\omega^2(x)};$$

3° da integrabilnost jednačine (8) za h proizvolno povlači za sobom integrabilnost jednačine (22) tako isto za proizvoljno h.

7. Dobijeni rezultati ističu na vidlk činjenicu da je od značaja imati što veći broj linearnih jednačina oblika (8) koje su integrabilne za ma kakvo h. Darboux-ova teorema[3] daje mogućnost da se obrazuju takve jednačine, u neograničenom broju.

Darboux-ova teorema glasi:

Pretpostavimo da je linearna jednačina

$$\frac{d^2 \eta}{d x^2} = [\varphi(x) + h] \eta \tag{23}$$

integrabilna za sve vrednosti konstante h, *i neka je* θ (x) *jedno rešenje te jednačine za jednu partikularnu vrednost konstante* h, *recimo* $h = h_1$. *Tada je jednačina istog oblika*

$$\frac{d^2 \eta_1}{d x^2} = \left[\theta \cdot \left(\frac{1}{\theta} \right)'' + h - h_1 \right] \eta_1 \tag{24}$$

takođe integrabilna za sve vrednosti h. *Ako je* η *opšte rešenje jednačine* (23), *koje odgovara jednoj određenoj vrednosti parametra* h, *različitoj od* h_1, *tada izraz*

$$\eta_1 = \eta' - \frac{\theta'}{\theta} \eta$$

pretstavlja opšte rešenje jednačine (24) *za istu vrednost parametra* h.

Ako se pođe od jedne integrabilne jednačine oblika (23), na osnovu navedene Darboux-ove teoreme, mogućno je konstruisati beskrajan niz jednačina istog oblika koje će biti integrabilne za ma kakvo h.

Darboux je na primerima pokazao nesumnjivi značaj svoje teoreme koju je nazvao *un curieux théorème d'Analyse.* Buhl[4] se takođe mnogo zadržao u svome kursu na navedenoj Darboux-ovoj teoremi.

Drach[5] se tako isto bavio problemom integracije jednačine (23), kada h ima proizvoljnu vrednost. Primenom svoje metode *logičke integracije*, Drach je dobio veoma opšti rezultat. On kaže tekstuelno:

Nous avons réussi à déterminer la fonction $\varphi(x)$ *dans tous les cas où l'intégrale* η *peut s'obtenir par quadratures.*

---

3) [2], str. 210.
4) [1], str. 166—170.
5) [3], [4].

8. Interesantno je podvući ove činjenice:

1⁰ Darboux je došao do navedene teoreme baveći se nekim problemima Teoriske fizike i Diferencijalne geometrije. Osnovna jednačina tih disparatnih problema je jednačina

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = \Big[P(u+v) - Q(u-v)\Big]\, z,$$

u čijem rešavanju bitnu ulogu igra jednačina

(25) $$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \Big[\varphi(x) + h\Big]\eta\,;$$

2⁰ U ovoj raspravi[6] pokazali smo da rešenje jednog važnog problema iz teorije elasticiteta zavisi takođe od jednačine (25);

3⁰ Drach-ova metoda *logičke integracije*, koja je do sada malo korišćena, pokazala je na slučaju jednačine (25) da je ona jedno moćno sredstvo za dobijanje veoma opštih rezultata.

9. Na primerima ćemo ilustrovati korisnost teorema koje smo dali u ovoj raspravi.

Prvi primer. Posmatrajmo jednačinu

(26) $$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \left(\frac{2}{x^2} + h\right)\eta,$$

čije je opšte rešenje[7])

(27) $$\eta = A\left(\sqrt{h} - \frac{1}{x}\right) e^{x\sqrt{h}} + B\left(\sqrt{h} + \frac{1}{x}\right) e^{-x\sqrt{h}},$$

gde su A i B integracione konstante.

Za $h = 0$, jednačine (26) i (27) postaju respektivno

(28) $$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{2}{x^2}\eta,$$

(29) $$\eta = \frac{B-A}{x}.$$

---

6) *Videti* takođe [9].

7) [1], str. 168, obrazac (39).

Relacija (29) daje samo partikularno rešenje jednačine (28). Ako se pođe od partikularnog rešenja $\eta_1 = 1/x$, nalazi se da izraz

$$\eta = \frac{\alpha}{x} + \beta x^2 \tag{30}$$

(α, β = integracione konstante)

definiše opšte rešenje jednačine (28).

Buhl[8] je jednim oštroumnim načinom pokazao kako se do rezultata (30) može doći i na osnovu (27).

Primenom dobijenih rezultata u § 5 ove rasprave na jednačinu (26), nalazi se:

$$z = -\frac{C_1}{3\beta}\,\frac{1}{\alpha+\beta x^3} + C_2 + \frac{C_1}{3\beta}\,\frac{1}{\alpha+\beta x_0^3},$$

ali mi ćemo posmatrati jednostavniji slučaj

$$z = \frac{1}{\alpha+\beta x^3},$$

odakle je

$$x = \beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z} - \alpha\right)^{1/3}, \tag{31}$$

gde smo uzeli realnu vrednost korena.

Treba primetiti da su svi gornji računi izvedeni pod pretpostavkom da je $\beta \neq 0$. Slučaj $\beta = 0$ je jednostavan i nećemo ga ovde navoditi.

Dalje se nalazi:

$$H = z\left[A\,(x\sqrt{h}-1)\,e^{x\sqrt{h}} + B\,(x\sqrt{h}+1)\,e^{-x\sqrt{h}}\right], \tag{32}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{9\beta^2}\,\frac{1}{x^4 z^4}, \tag{33}$$

jer je ovde $C_1 = -3\beta$.

U izrazima (32) i (33) koji definišu $H(z)$ i $\Phi(z)$ javlja se x koje treba smeniti izrazom

$$\beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z} - \alpha\right)^{1/3}.$$

8) [1], str. 168.

Prema tome, diferencijalna jednačina

$$(34)\qquad \frac{d^2 H}{dz^2} = h\frac{\beta^{-2/3}}{z^4}\left(\frac{1}{z} - \alpha\right)^{-4/3} H$$

ima kao opšte rešenje

$$(35)\qquad H = z\left\{A\left[h^{1/2}\beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z} - \alpha\right)^{1/3} - 1\right]\exp\left[h^{1/2}\beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z} - \alpha\right)^{1/3}\right]\right.$$

$$\left. + B\left[h^{1/2}\beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z} - \alpha\right)^{1/3} + 1\right]\exp\left[-h^{1/2}\beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z} - \alpha\right)^{1/3}\right]\right\}.$$

Za Neményi-Truesdell-ovu jednačinu (1) dobija se, u ovom slučaju, sledeći rezultat:

Ako se u izrazu (35) stavi:

$h = 1 - n^2$, (n = ceo pozitivan broj),

$A = A_1$, $B = A_2$ (da bismo oznake prilagodili onima u § 5),

dobija se funkcija $F(z)$.

Ako se u izrazu (35) stavi $h = 1$ i $A = A_3$, $B = A_4$, dobija se funkcija $f(z)$.

Funkcije $F(z)$ i $f(z)$, nađene na navedeni način, sadrže šest proizvoljnih konstanata A_1, A_2, A_3, A_4, α, β i pretstavljaju jedno rešenje neodređene jednačine (1) koje odgovara funkciji

$$\Phi(z) = \frac{\beta^{-2/3}}{z^4}\left(\frac{1}{z} - \alpha\right)^{-4/3}.$$

Do opštijih rezultata se dolazi, ako se kao polazna jednačina uzme

$$(36)\qquad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \left[\frac{\nu(\nu - 1)}{x^2} + h\right]\eta$$

(ν = ceo broj, pozitivan, negativan ili nula)

koja je integrabilna[9] za ma kakvo h. Jednačina (36) sadži kao partikularni slučaj jednačinu (26) ($\nu = 2$) koju smo gore koristili za iznalaženje rešenja jednačine (1).

[9]) [5], str. 435, jednačina 2.153.

Drugi primer. Uzmimo sad jednačinu

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}=\left(\frac{2}{\sin^2 x}+h\right)\eta \tag{37}$$

čije je opšte rešenje[10])

$$\eta=\sin^2 x\left(\frac{1}{\sin x}D\right)^2\left(Ae^{x\sqrt{h}}+Be^{-x\sqrt{h}}\right),$$

$$\left(h\neq 0,\quad D=\frac{d}{dx}\right)$$

gde su A i B integracione konstante.

Za $h=0$, opšte rešenje jednačine (37) je[11])

$$\eta=\alpha\operatorname{cotg} x+\beta\,(1-x\operatorname{cotg} x)$$

$$(\alpha,\beta=\text{integracione konstante}).$$

Da bismo imali što prostije obrasce, za $\omega(x)$ uzmimo ovaj partikularni slučaj

$$\omega(x)=\operatorname{cotg} x.$$

Tada je[12])

$$z=\operatorname{tg} x-x,$$

$$\Phi(z)=\operatorname{cotg}^4 x.$$

Najzad dobijamo

$$H(z,h;\,A,B)=\frac{\sin^3 x}{\cos x}\left(\frac{1}{\sin x}D\right)^2\left(Ae^{x\sqrt{h}}+Be^{-x\sqrt{h}}\right),$$

gde je x definisano transcendentnom jednačinom

$$\operatorname{tg} x-x=z.$$

10) *Videti*, na primer, [5], str. 505, jednačina 2.424.
11) *Videti*, na primer, [5], str. 504, jednačina 2.422.
12) Opet smo izostavili integracionu konstantu.

Prema tome, skup funkcija

$$F = H(z,\ 1 - n^2;\ A_1,\ A_2),$$

$$f = H(z,\ 1;\ A_3,\ A^4)$$

$$(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4 = \text{integracione konstante})$$

pretstavlja jedno rešenje Neményi-Truesdell-ove jednačine (1).

10. Proučavajući diferencijalnu jednačinu oblika (8), Darboux[13] je dao precizne podatke i o tome kako se javlja parametar h u opštem rešenju svih jednačina koje se obrazuju primenom njegove metode. Evo njegovog rezultata:

Ako se pođe od jedne jednačine

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = [\varphi(t) + h]\, y \tag{38}$$

koju znamo, prema pretpostavci, da integralimo za sve vrednosti h, tada opšti integrali svih jednačina, koje se obrazuju Darboux-ovim postupkom, imaju oblik

$$z = Ay + B\frac{dy}{dt}, \tag{39}$$

gde je y opšte rešenje jednačine (38), a A i B označavaju neke funkcije od t koje su polinomi po h

Obrnuto, ako jedna jednačina

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = [\psi(t) + h]\, z$$

ima opšte rešenje oblika (39), gde su A i B funkcije od t i polinomi po h, ona proističe neophodno iz jednačine (38) primenom Darboux-ovog postupka.

Ovaj Darboux-ov zaključak od važnosti je i za problem teorije elasticiteta koji su proučavali Neményi, Truesdell, Sokolovsky i drugi.

11. Od interesa bi bilo da se, na osnovu metode izložene u ovoj raspravi, sistematski formiraju skupovi funkcija $(F_\nu,\ f_\nu)$ koji pretstavlaju rešenja jednačine (1). Tako bi specijalisti za probleme teorije elasticiteta mogli da biraju one funkcije $(F_\nu,\ f_\nu)$ koje su od interesa u primenama.

---

[13] [2], str. 213—216. *Videti*, tako isto, [1], str. 169.

D. S. Mitrinovitch

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'UN PROBLÈME IMPORTANT DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

(Résumé)

Dédié à Monsieur le Professeur
Erich Kamke
à propos de sa soixantième anniversaire

1. L'objet de cette étude est l'équation différentielle de Neményi-Truesdell

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dz^2}+(n^2-1)\frac{1}{f}\frac{d^2f}{dz^2}=0 \tag{1}$$

avec

$$n = \text{nombre naturel},\ F=F(z),\ f=f(z).$$

L'équation indéterminée (1) est *l'équation fondamentale* d'un problème[1]) important de la théorie des couches élastiques, problème que l'on étudie depuis 1912 jusqu'à nos jours. Étant donné que, jusqu'à présent, l'intégration par quadratures de l'équation (1) n'est réalisée qu'en un nombre très restreint de cas, le problème en question n'a obtenu sa solution que dans qulques cas particuliers, ce qu'on constate par l'analyse de la littérature[2]) assez abondante relative à ce problème.

On donne ici une méthode permettant de construire une suite illimitée de solutions (F_p, f_p), dans chacune desquelles interviennent sept constantes arbitraires.

2. Au lieu de l'équation (1), on considérera le système

$$\frac{d^2f}{dz^2}=\Phi(z)f,\qquad \frac{d^2F}{dz^2}=(1-n^2)\Phi(z)F, \tag{2}$$

Φ désignant une fonction arbitraire de z; et, plus généralement, l'équation

---

[1]) Voir, en particulier, [6], [10], [11]. Les chiffres entre crochets renvoient à l'index bibliographique qui termine cette étude.

[2]) Dans ses importantes études [13], [14], Truesdell a analysé des résultats du problème en question, qui sont dus à E Meissner, H. Reissner, P. Neményi, E. Reissner, V. Sokolovsky, et à d'autres. A la bibliographie de Truesdell on peut ajouter les travaux récents, comme par exemple: [12], [16]; *cf.* de même [17], p. 589—591, et [18].

$$(3) \qquad \frac{d^2 H}{dz^2} = h\, \Phi(z)\, H,$$

où intervient un paramètre h, indépendant de z.

Par suite, l'intégration de l'équation (1) se ramène à la formation des équations de la forme (3) qui seront intégrables pour h arbitraire.

Pour abréger, nous donnons le nom de *fonctions associées* aux deux fonctions F_p et f_p, solutions des équations (2) pour une même fonction donnée $\Phi_p(z)$.

3. Lorsque $a(x)$, ($a \neq$ const), désigne une fonction arbitraire, supposée continue et dérivable, l'équation (3), par le changement de variables

$$(4) \qquad z = a(x), \quad H = \eta \sqrt{a'(x)},$$

prend la forme

$$(5) \qquad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \left[h\, \Phi(a)\, a'^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{a''}{a'}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a''}{a'}\right)' \right] \eta,$$

les accents désignant des dérivées par rapport à x.

En choisissant $a(x)$ de manière que

$$(6) \qquad \Phi(a)\, a'^2 = 1,$$

l'équation (5) devient

$$(7) \qquad \frac{d^2 \eta}{dx^2} = \left[\varphi(x) + h \right] \eta$$

avec

$$(8) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{a''}{a'}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a''}{a'}\right)'.$$

Proposition I. *Si l'équation* (3) *est intégrable pour une forme donnée de* $\Phi(z)$, h *demeurant arbitraire, l'équation* (7), *avec* $\varphi(x)$ *correspondant, sera aussi intégrable pour* h *arbitraire.*

4. Comme on vient de montrer plus haut, on passe, à l'aide de (4), à l'équation (7), où la fonction $\varphi(x)$ est définie par (8).

Inversement, si l'on veut passer d'une équation de la forme (7) à (3), il faudra partir des relations (6) et (8). En posant

$$(9) \qquad \frac{a''}{a'} = -2\frac{\omega'}{\omega}, \qquad (\omega = \omega(x) \neq \text{const}),$$

dans la relation (8), il vient

$$(10) \qquad \frac{d^2 \omega}{dx^2} = \varphi(x)\, \omega.$$

Il importe que l'équation déterminant $\omega(x)$ ait la forme de l'équation (7) avec $h = 0$.

Ce qui précède permet d'énoncer la proposition, inverse de la proposition I, suivante:

Proposition II. *L'intégrabilité par des quadratures de l'équation* (7) *pour une forme donnée de* $\varphi(x)$ *et* h *quelconque, entraîne pour* $h=0$ *l'intégrabilité des équations* (10) *et* (9), *et aussi l'intégrabilité de l'équation* (3) *pour* h *arbitraire, la fonction* $\Phi(z)$ *étant déterminée par les formules*

$$\Phi(z)=1/a'^2(x), \qquad z=a(x).$$

5. Pour appliquer cette proposition à l'équation de Neményi-Truesdell (1), il faut prendre une solution de l'équation (10) ou, ce qui revient au même, de l'équation (7) pour $h=0$ qui est, par hypothèse, intégrable pour h quelconque. Si l'on veut envisager le cas le plus général, on doit prendre pour la fonction $\omega(x)$ l'expression

$$\omega(x)=\alpha\,\omega_1(x)+\beta\,\omega_2(x), \tag{11}$$

α et β étant deux constantes arbitraires, ω_1 et ω_2 deux solutions particulières de l'équation (7) pour $h=0$, linéairement indépendantes.

Après cela, la relation (9) fournit

$$a(x)=\delta\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\omega^2}+\gamma, \tag{12}$$

δ, γ étant deux nouvelles constantes arbitraires, x_0 une valeur numérique convenablement choisie. Par l'inspection des relations (11) et (12), on conclut qu'on peut rassembler en deux les trois constantes α, β, δ, ce qui montre que dans (12) figurent, *de fait*, trois constantes arbitraires.

Tenant compte de (4), la solution générale de l'équation (3), pour h quelconque, est déterminée par

$$H=\frac{\sqrt{\delta}}{\omega}\,\eta, \tag{13}$$

où η représente la solution générale de l'équation (7) pour h quelconque, que l'on connaît d'après l'hypothèse.

Finalement, la fonction $\Phi(z)$ se détermine à l'aide des relations

$$\Phi(z)=\frac{\omega^4}{\delta^2}, \qquad z=\delta\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\omega^2}+\gamma, \tag{14}$$

avec

$$\omega(x)=\alpha\,\omega_1(x)+\beta\,\omega_2(x).$$

D'après ce qui précède, on constate:

1° Chaque cas d'intégrabilité de l'équation (7), h demeurant arbitraire, fournit une équation de la forme (3), de même intégrable pour h arbitraire;

2° La fonction $\Phi(z)$ correspondant à un cas d'intégrabilité de (7) dépend de trois constantes arbitraires α, β, γ (car on peut poser $\delta=1$ sans nuire à la généralité), tandis que la solution générale de l'équation (3), où intervient cette fonction $\Phi(z)$, dépend de cinq constantes arbitraires;

3° Chaque ensemble des fonctions associées (F, f), solutions de l'équation indéterminée (1), est de la forme

$$F = A_1\,\Theta_1(z, \alpha, \beta, \gamma) + A_2\,\Theta_2(z, \alpha, \beta, \gamma),$$
$$f = A_3\,\Theta_3(z, \alpha, \beta, \gamma) + A_4\,\Theta_4(z, \alpha, \beta, \gamma),$$

A_ν étant des constantes arbitraires, Θ_ν des fonctions qu'on obtient par l'intégration des équations (2), où figure la fonction $\Phi(z)$, se déterminant à l'aide des formules (14).

6. Nous allons maintenant montrer que la substitution

$$\eta = \frac{\omega}{\sqrt{\delta}} H, \quad z = \delta \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\omega^2} + \gamma,$$

effectuée dans l'équation (7), conduit réellement à l'équation (3), lorsque $\omega(x)$ est une solution quelconque de l'équation

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \varphi(x)\,\eta.$$

En effet, on a, après un calcul facile à effectuer,

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\omega^2}{\delta},$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\left(\frac{\delta^2}{\omega^3}\frac{d^2 H}{dz^2} + H\omega''\right),$$

ce qui, porté dans (7), fournit

$$\frac{d^2 H}{dz^2} = h\frac{\omega^4}{\delta^2} H + \frac{\omega^3}{\delta^2}\left[\omega'' - \varphi(x)\,\omega\right] H.$$

La dernière équation prend la forme de l'équation (3), où

$$\Phi(z) = \frac{\omega^4}{\delta^2}, \qquad z = \delta \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\omega^2} + \gamma,$$

toutes les fois que

$$\omega'' - \varphi(x)\,\omega = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

7. Les résultats mis au point précédemment présentent, en particulier, un intérêt grâce au fait que l'on peut former des équations de la forme (7), intégrables pour h arbitraire, dans un nombre illimité de cas. Or, un théorème[1]) de Darboux donne la possibilité de former une suite illimitée de telles équations.

J. Drach[2]) a appliqué sa méthode *d'intégration logique* à l'équa-

---

[1]) *Cf.* [2], p. 210. Nous avons retrouvé {*cf.* [7] et [8], p. 148—151} ce théorème de Darboux par une voie élémentaire et naturelle, comme cas particulier d'un théorème général relatif à l'équation de Riccati. *Voir* aussi [1], p. 166—170.

[2]) *Cf.* [3], [4].

tion différentielle (7) et a trouvé un résultat très général, c'est-à-dire il a réussi à déterminer la fonction $\varphi(x)$ dans tous les cas où l'intégrale η peut s'obtenir par des quadratures, h demeurant arbitraire.

Les faits précédents montrent que la proposition II de cette étude, grâce aux résultats de Darboux et de Drach, ci-dessus indiqués, fournit une suite illimitée des ensembles de fonctions associées (F_p, f_p), vérifiant l'équation indéterminée (1), ce qui donne la possibilité d'avancer considérablement le problème de l'Élasticité dont il s'agit ici.

8. Nous allons illustrer la proposition II par l'exemple[1]) suivant. Considérons l'équation

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \left(\frac{2}{x^2} + h\right)\eta \tag{15}$$

dont la solution générale[2]) est

$$\eta = A\left(\sqrt{h} - \frac{1}{x}\right)e^{x\sqrt{h}} + B\left(\sqrt{h} + \frac{1}{x}\right)e^{-x\sqrt{h}}, \tag{16}$$

(A, B = constantes d'intégration).

Pour $h=0$, la solution générale de l'équation (15) est

$$\omega = \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$$

(α, β = constantes d'intégration).

D'apès (14), on a

$$z = \delta \int_{x_0}^{x} \frac{x^2\,dx}{(\alpha + \beta x^3)^2} + \gamma,$$

mais on considérera, pour simplifier, le cas particularisé suivant

$$z = \frac{1}{\alpha + \beta x^3} \tag{17}$$

($\beta \neq 0$, $\delta = -3\beta$, γ ayant une expression qu'on omet ici).

Il s'ensuit de (17)

$$x = \beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z} - \alpha\right)^{1/3}. \tag{18}$$

---

1) Un autre exemple est indiqué dans le texte écrit en serbe de cette étude. On peut multiplier des exemples en partant du Traité excellent de Kamke [5].

2) *Cf.* [1], p. 168, l'équation (39).

Finalement, on a

$$\Phi(z)=\frac{1}{9\beta^2 x^4 z^4},$$

$$H=z\left[A(x\sqrt{h}-1)e^{x\sqrt{h}}+B(x\sqrt{h}+1)e^{-x\sqrt{h}}\right],$$

où x est à remplacer par sa valeur définie par (20).

Par suite, la solution générale de l'équation

$$\text{(19)}\qquad \frac{d^2H}{dz^2}=h\frac{\beta^{-2/3}}{z^4}\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)^{-4/3}H$$

est donnée par

$$\text{(20)}\quad H(z,h;\alpha,\beta;A,B)=z\left\{A\left[h^{1/2}\beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)^{1/3}-1\right]\exp\left[h^{1/2}\beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)^{1/3}\right]\right.$$
$$\left.+B\left[h^{1/2}\beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)^{1/3}+1\right]\exp\left[-h^{1/2}\beta^{-1/3}\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)^{1/3}\right]\right\}.$$

L'équation de Neményi-Truesdell (1), correspondant à l'équation (19), a pour la solution

$$F=H(z,1-n^2;\alpha,\beta;A_1,A_2),$$

$$f=H(z,1;\alpha,\beta;A_3,A_4),$$

(n=nombre naturel; α, β, A_ν = constantes arbitraires)

où H est défini par (20).

9. En vue d'une formation systématique des fonctions associées (F_p, f_p) vérifiant l'équation indéterminée (1), on devrait suivre la méthode exposée dans cette étude. Cela faciliterait aux spécialistes en matière de la théorie de l'Élasticité de choisir de telles fonctions associées (F_p, f_p) qui présenteraient un intérêt dans des applications.

10. Darboux a été conduit à son théorème ci-desus indiqué, en étudiant la déformation infiniment petite des surfaces minima. Tout dernièrement, G. Viguier[1]) a montré que ce théorème intervient aussi dans quelques questions de Physique mathématique. Finalement, dans cette étude, nous avons mis en correspondance le même théorème avec un problème de la théorie des couches élastiques. L'applicabilité du théorème de Darboux, dans des questions si disparates, montre l'exactitude des mots de Buhl, en disant dans ces beaux *Nouveaux éléments d' Analyse*, t. 3 (1940), p. 170:

Le théorème de Darboux, quoique ayant donné, par son illustre auteur, en 1882, *apparaît, de plusieurs manières, comme un théorème dont l'intérêt n'est pas épuisé à l'heure actuelle*".

11. Un résumé très succinct de cette étude est présenté,[2]) le 31 août 1950, à la séance de *l'Académie des Sciences de Paris*.

[1]) *Cf.* [15].
[2]) *Cf.* [9].

LITERATURA — INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

A. Buhl

[1] Nouveaux éléments d'Analyse, t. 3, 1940, Paris, VI+195 pages.

G. Darboux

[2] Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. 2, 1915, Paris, 579 pages.

J. Drach

[3] Détermination des cas de réduction de l'équation difféi etielle $d^2y/dx^2 = [\varphi(x)+h]y$ *(Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 168, 1919, p. 47—50).

[4] Sur l'intégration par quadratures de l'équation $d^2y/dx^2=[\varphi(x)+h]y$ *(Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 168, 1919, p. 337—340).

E. Kamke

[5] Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, dritte Auflage, 1944, Leipzig, XXVI+660 S.

G. Lampariello

[6] *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, Bd. 32, 1949, S. 85—86.

D. S. Mitrinovitch

[7] Théorème sur l'équation de Riccati *(Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 208, 1939, p. 156—157).

[8] Quelques propositions relatives à l'équation différentielle de Riccati *(Bulletin de l'Académie serbe*, série A, t. 6, 1939, p. 121—156).

[9] Mise en correspondance d'un problème non résolu de la théorie de l'Élasticité avec un problème résolu par Darboux et Drach *(Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 231, 1950, p. 327—328).

P. Neményi

[10] Beiträge zur Berechnung der Schalen unter unsymmetrischer und unstetiger Belastung *(Bygningsstatiske Meddelelser*, 1936, Denmark).

P. Neményi — C. Truesdell

[11] A stress function for the membrane theory of shells of revolution *(Proceedings of the National Academy of Sciences*, Washington, Vol. 29, 1943, pp. 159—162).

P. Serafimov

[12] Spannungszustand hyperbolischer Schalen nach Membrantheorie (Dissertation, Technische Hochschule zu Dresden, 1947).

C. Truesdell

[13] The membrane theory of shells of revolution *(Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 58, 1945, pp. 96—166).

[14] On Sokolovsky's „momentless shells" *(Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 61, 1947, pp. 128—133).

G. Viguier

[15] Les chaînes de Darboux et l'équation de Fourier (*Experientia*, Vol. 5, 1949, p. 439).

W. Zerna

[16] Zur Membrantheorie der algemeinen Rotationsschalen (*Ingenieur-Archiv*, Bd. 17, 1949, S. 223—232).

А. Л. Гольденвейзер — А. И. Лурье

[17] О математической теории равновесия упругих оболочек (*Прикладная математика и механика*, Москва—Ленинград, том 11, 1947, стр. 565—592).

В. В. Соколовский

[18] Уравнения равновесия безмоментных оболочек (*Прикладная математика и механика*, Москва—Ленинград, том 7, 1943, стр. 57—64).