Нумерички пример. Једначина

$$y'' + (4\,e^{sx} + 7)\,y' + (3\,e^{2sx} + 5\,e^{sx} + 10)\,y = 0 \tag{S}$$

биће сводљива ако s има једну од следећих вредности:

$$-6, \quad -12, \quad -4, \quad -2.$$

Овим вредностима s одговарају четири диференцијалне једначине облика (S) које се своде респективно на ове системе:

1° за $s = -6$ имамо:

$$y' - (e^{-6x} + 2)\,y = z,$$
$$z' + (3\,e^{-6x} + 5)\,z = 0;$$

2° за $s = -12$ имамо:

$$y' + (e^{-12x} + 5)\,y = z,$$
$$z' + (3\,e^{-12x} + 2)\,z = 0;$$

3° за $s = -4$ имамо:

$$y' + (3\,e^{-4x} + 2)\,y = z,$$
$$z' + (e^{-4x} + 5)\,z = 0;$$

4° за $s = -2$ имамо:

$$y' + (3\,e^{-2x} + 5)\,y = z,$$
$$z' + (e^{-2x} + 2)\,z = 0.$$

14. Да би изрази били што једноставнији, слично као у првој глави, увешћемо два параметра: p и q.

Ставимо

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a+p), \\ C &= -q\,(b+q), \end{aligned} \tag{115}$$

па услови (111) – (114) постају респективно:

$$(M_1) \equiv (a+p)\,s - 2\,pq - aq - bp = B,$$
$$(M_2) \equiv (a+p)\,s + ab + aq + bp + 2\,pq = B,$$
$$(M_3) \equiv -ps + ab + aq + bp + 2\,pq = B,$$
$$(M_4) \equiv -ps - aq - bp - 2\,pq = B.$$

На основу (115), формуле (106) – (109) добијају респективно ове облике у матричној форми:

I. *систем:*

$$M = \begin{Vmatrix} a+p & b+q \\ -p & -q \end{Vmatrix} \equiv M_1;$$

II. *систем:*

$$M = \begin{Vmatrix} a+p & -q \\ -p & b+q \end{Vmatrix} \equiv M_2;$$

III. *систем:*

$$M = \begin{Vmatrix} -p & b+q \\ a+p & -q \end{Vmatrix} \equiv M_3;$$

IV. *систем:*

$$M = \begin{Vmatrix} -p & -q \\ a+p & b+q \end{Vmatrix} \equiv M_4,$$

где је са M означена матрица:

$$M = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{Vmatrix}.$$

За израз B дефинисан једном од формула (M_k) и за матрицу M_k са истим индексом казаћемо да су *кореспондентни.*

15. На основу напред изнетих чињеница могућно је формулисати овај став:

Став V. *Дифененцијална једначина* (100), *под условом:*

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a+p), \\ C &= -q\,(b+q) \\ B &= (M_k) \end{aligned} \tag{116}$$

(s, a, b, p, q = произвољни параметри)

сводљива је на систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} y' + (\lambda_1 e^{sx} + \mu_1)\, y &= z, \\ z' + (\lambda_2 e^{sx} + \mu_2)\, z &= 0, \end{aligned} \tag{117}$$

где је матрица

$$M = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{Vmatrix}$$

једнака матрици M_k која је у кореспонденцији са изразом $B = (M_k)$.

Овај став садржи у себи четири подстава с обзиром на то да је:

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Сада ћемо интегралити систем (117): из друге од тих једначина налази се:

$$z = \Lambda_1 \, exp\left(-\frac{\lambda_2}{s} e^{sx} - \mu_2 x \right), \tag{118}$$

(Λ_1 = интеграциона константа).

Из прве од једначина (117), водећи рачуна о (118), добија се:

$$y = \Lambda_2 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x \right) \tag{119}$$

$$+ \Lambda_1 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x \right) \int exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{s} e^{sx} \right) \cdot exp\left[(\mu_1 - \mu_2) x \right] dx$$

(Λ_2 = интеграциона константа).

Ако је

$$s = \mu_1 - \mu_2,$$

квадратура у (119) може се извршити и тада је:

$$y = \Lambda_2 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x \right) \tag{120}$$

$$+ \frac{\Lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x \right) \cdot exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{s} e^{sx} \right),$$

где је

$$s = \mu_1 - \mu_2.$$

Решењу (120) може се дати овај облик:

$$y = e^{-\mu_1 x} \left[\Lambda_2 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} \right) + \frac{\Lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} exp\left(-\frac{\lambda_2}{s} e^{sx} \right) \right]$$

$$(s = \mu_1 - \mu_2).$$

Ако је

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

тада (119) постаје:

$$y = \Lambda_2 \, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x \right)$$

$$+ \frac{\Lambda_1}{\mu_1 - \mu_2} exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x \right) \cdot exp\left[(\mu_1 - \mu_2) x \right]$$

$$(\mu_1 \neq \mu_2)$$

тј.

$$y = exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx}\right)\left(\Lambda_2 e^{-\mu_1 x} + \frac{\Lambda_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2 x}\right). \tag{121}$$

У случају када је истовремено:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \mu_2,$$

тада (119) добија следећи једноставан облик:

$$y = (\Lambda_1 x + \Lambda_2)\, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s} e^{sx} - \mu_1 x\right). \tag{122}$$

16. H. Görtler[1]) посматрао је један партикуларни случај једначине (100), наиме случај када је:

$$s = 1$$

и показао је да једначина

$$y'' + (a e^x + b)\, y' + (A e^{2x} + B e^x + C)\, y = 0, \tag{123}$$

где је:

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a+p), \\ B &= -aq - bp - 2pq - p, \\ C &= -q\,(b+q) \end{aligned} \tag{124}$$

(p, q, a, b = произвољни параметри)

има као партикуларно решење функцију

$$exp\,(p\, e^x + qx).$$

Görtler-ов случај обухваћен је нашим критеријумом интеграбилитета једначине (100) који је дат ставом V. Заиста, ако се у ставу V посматра случај

$$s = 1, \quad k = 4,$$

има се резултат који је дао Görtler.

Критеријум дат ставом V садржи исто тако, као партикуларне случајеве, разне резултате које су навели Craig, Conte, Görtler, Kamke и други.

---

1) *Ergänzungen zu* Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* Bd. 22, 1942. S. 233–234*)*.

Тако, на пример, једначина

$$a^2y'' + a(a^2 - 2b\,e^{-ax})\,y' + b^2\,e^{-2ax}\,y = 0$$
$$(a,\ b = \text{Const}),$$

коју је интегралио Craig[1]), сводљива је на систем:

$$y' - \left(\frac{b}{a}e^{-ax} - a\right)y = z,$$
$$z' - \frac{b}{a}e^{-ax}\,z = 0$$
$$(a \neq 0).$$

L. Conte[2]) је показао да је једначина

$$y'' + ay' + b\,e^{2ax}y = 0,$$

интеграбилна.

Та једначина сводљива је на систем:

$$y' + (\sqrt{-b}\,e^{ax} + a)\,y = z,$$
$$z' - \sqrt{-b}\,e^{ax}\,z = 0$$

Једначина[3])

$$y'' - (2\,e^{x} + 1)\,y' + e^{2x}y = 0,$$

коју су интегрирали Morris и Brown, сводљива је на систем

$$y' - e^{x}\,y = z,$$
$$z' - (e^{x} + 1)\,z = 0$$

или на систем

$$y' - (e^{x} + 1)\,y = z,$$
$$z' - e^{x}\,z = 0.$$

Диференцијалне једначине[4])

$$y'' + y' + e^{-2x}\,y = 0, \tag{125}$$
$$y'' - y' + e^{2x}\,y = 0 \tag{126}$$

такође су сводљиве.

---

[1]) Kamke I, S. 422, Gl. 2.90.
[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.37b. *Видети* također: *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. 6—7, 1937—1938, p. 119—125.
[3]) Kamke I, S. 418, Gl. 2.63.
[4]) Kamke I, S. 412, Gl. 2.33, Gl. 2.34.

тј.

$$y = exp\left(-\frac{\lambda_1}{s}e^{sx}\right)\left(\Lambda_2 e^{-\mu_1 x} + \frac{\Lambda_1}{\mu_1 - \mu_2}e^{-\mu_2 x}\right). \tag{121}$$

У случају када је истовремено:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \mu_2,$$

тада (119) добија следећи једноставан облик:

$$y = (\Lambda_1 x + \Lambda_2)\, exp\left(-\frac{\lambda_1}{s}e^{sx} - \mu_1 x\right). \tag{122}$$

16. H. Görtler[1]) посматрао је један партикуларни случај једначине (100), наиме случај када је:

$$s = 1$$

и показао је да једначина

$$y'' + (a e^x + b)\, y' + (A e^{2x} + Be^x + C)\, y = 0, \tag{123}$$

где је:

$$\begin{aligned} A &= -p\,(a+p), \\ B &= -aq - bp - 2pq - p, \\ C &= -q\,(b+q) \end{aligned} \tag{124}$$

(p, q, a, b = произвољни параметри)

има као партикуларно решење функцију

$$exp\,(p\, e^x + qx).$$

Görtler-ов случај обухваћен је нашим критеријумом интеграбилитета једначине (100) који је дат ставом V. Заиста, ако се у ставу V посматра случај

$$s = 1, \quad k = 4,$$

има се резултат који је дао Görtler.

Критеријум дат ставом V садржи исто тако, као партикуларне случајеве, разне резултате које су навели Craig, Conte, Görtler, Kamke и други.

---

[1]) *Ergänzungen zu* Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,* Bd. 22, 1942. S. 233–234*)*.

Тако, на пример, једначина

$$a^2y'' + a(a^2 - 2be^{-ax})y' + b^2e^{-2ax}y = 0$$
$$(a,\ b = \text{Const}),$$

коју је интегралио Craig[1]), своδљива је на систем:

$$y' - \left(\frac{b}{a}e^{-ax} - a\right)y = z,$$

$$z' - \frac{b}{a}e^{-ax}z = 0$$

$$(a \neq 0).$$

L. Conte[2]) је показао да је једначина

$$y'' + ay' + be^{2ax}y = 0,$$

интеграбилна.

Та једначина своδљива је на систем:

$$y' + (\sqrt{-b}\,e^{ax} + a)y = z,$$

$$z' - \sqrt{-b}\,e^{ax}z = 0$$

Једначина[3])

$$y'' - (2e^x + 1)y' + e^{2x}y = 0,$$

коју су интегрирали Morris и Brown, своδљива је на систем

$$y' - e^x y = z,$$

$$z' - (e^x + 1)z = 0$$

или на систем

$$y' - (e^x + 1)y = z,$$

$$z' - e^x z = 0.$$

Диференцијалне једначине[4])

$$y'' + y' + e^{-2x}y = 0, \tag{125}$$

$$y'' - y' + e^{2x}y = 0 \tag{126}$$

такође су своδљиве.

[1]) Kamke I, S. 422, Gl. 2.90.
[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.37b. *Видети* такође: *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. 6—7, 1937—1938, p. 119—125.
[3]) Kamke I, S. 418, Gl. 2.63.
[4]) Kamke I, S. 412, Gl. 2.33, Gl. 2.34.

Једначина (125) може се свести на систем:

$$y' + i e^{-x} y = z,$$

$$z' - (i e^{-x} - 1) z = 0$$

или на систем

$$y' - i e^{-x} y = z,$$

$$z' + (i e^{-x} + 1) z = 0$$

$$(i = \sqrt{-1}).$$

Једначина (126) је сводљива на систем:

$$y' + i e^{x} y = z,$$

$$z' - (i e^{x} + 1) z = 0$$

или на систем

$$y' - i e^{x} y = z,$$

$$z' + (i e^{x} - 1) z = 0$$

$$(i = \sqrt{-1}).$$

17. Узмимо сада једначину

$$y'' + (a e^{sx} + b) y' + (B e^{sx} + C) y = 0, \tag{127}$$

која је специјалан случај једначине (100).

Применимо став V на једначину (127); овом приликом имаћемо да разликујемо четири случаја:

I. *случај*. Пошто је овде

$$A = 0,$$

имамо

$$-p (a + p) = 0.$$

За $p = 0$, има се

$$B = a (s - q),$$
$$C = -q (b + q),$$

и једначина (127), у томе случају, своди се на систем:

$$y' + [a e^{sx} + (b + q)] y = z,$$

$$z' - qz = 0.$$

За $p=-a$ налази се:

$$B=a\,(b+q)$$
$$C=-q\,(b+q)$$

и тада се једначина (127) своди на систем

$$y'+(b+q)\,y=z,$$
$$z'+(a\,e^{sx}-q)\,z=0.$$

II. *случај*. Поступајући као у претходном случају, може се формулисати овај резултат:

1⁰ Једначина (127), где је

$$B=a\,(s+b+q),$$
$$C=-q\,(b+q)$$

своди се на систем

$$y'+(a\,e^{sx}-q)\,y=z,$$
$$z'+(b+q)\,z=0.$$

2⁰ Једначина (127), где је

$$B=-aq,$$
$$C=-q\,(b+q)$$

своди се на систем:

$$y'-qy=z,$$
$$z'+(a\,e^{sx}+b+q)\,z=0.$$

III. *случај*. 1⁰ Једначина (127) у којој је

$$B=a\,(b+q),$$
$$C=-q\,(b+q)$$

своди се на систем:

$$y'+(b+q)\,y=z,$$
$$z'+(a\,e^{sx}-q)\,z=0.$$

2⁰ Једначина (127) у којој је:

$$B=a\,(s-q),$$
$$C=-q\,(b+q)$$

своди се на систем:

$$y'+[a\,e^{sx}+(b+q)]\,y=z,$$
$$z'-qz=0.$$

IV. *случај.* 1° Једначина (127), где је

$$B = -aq,$$
$$C = -q\,(b+q)$$

своди се на систем:

$$y' - qy = z,$$
$$z' + (a\,e^{sx} + b + q)\,z = 0.$$

2° Једначина (127), где је

$$\begin{aligned} B &= a\,(s+b+q), \\ C &= -q\,(b+q), \end{aligned} \qquad (128)$$

своди се на систем:

$$y' + (a\,e^{sx} - q)\,y = z,$$
$$z' + (b+q)\,z = 0.$$

У сва четири горе посматрана случаја:

$a,\ b,\ p,\ q =$ произвољни параметри.

Görtler[1]) је показао да је једначина

$$y'' + (a\,e^{x} + b)\,y' + (B\,e^{x} + C)\,y = 0$$

интеграбилна ако је

$$B = a\,(1+b+q),$$
$$C = -q\,(b+q).$$

Овај резултат је садржан, као партикуларни случај, у нашем четвртом случају. Заиста, стављајући $s=1$ у формулама (128), добија се управо Gortler-ов случај.

Ако се претпостави да је $B \neq 0$, закључује се да једначина[2])

$$y'' + by' + (B\,e^{x} + C)\,y = 0$$

није сводљива у прецизираном смислу.

Исти је случај и са једначином[3])

$$y'' + B\,e^{sx}\,y = 0.$$

---

[1]) Görtler, S. 233, Gl. 4. (Та расправа је раније цитирана).
[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.37a.
[3]) Kamke I, S. 403, Gl. 2.17.

Д. С. МИТРИНОВИЧ

СПОСОБ ОБРАЗОВАНИЯ КРИТЕРИУМА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИМИ НАПЕРЕД ДАННУЮ ФОРМУ

(*Вывод*)

1. Рассматриваем линейное диференциальное уравнение порядка n:

$$\varphi_0 \overset{(n)}{y} + \varphi_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + \varphi_{n-1} y' + \varphi_n y = 0, \tag{1}$$

где

$$\varphi_k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n)$$

являются определенными функциями переменного x.

Одновременно рассматриваем систему линейных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} f_{k1}\, y'_{k-1} + f_{k2}\, y_{k-1} = y_k, \\ f_{n1}\, y'_{n-1} + f_{n2}\, y_{n-1} = 0 \\ (y_0 = y; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1), \end{gathered} \tag{2}$$

где f_{kj} представляют функции переменного x, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{array}{lll} 1^0 & f_{k1} \neq 0 & (k=1, 2, \ldots, n); \\ 2^0 & f_{kj} & (k=1, 2, \ldots, n; \; j=1, 2) \end{array}$$

являются функциями непрерывными и диференцируемыми.

Если исключим $(n-1)$ функцию

$$y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$$

из n уравнений (2), получим одно линейное уравнение порядка n

$$\Phi_0 \overset{(n)}{y} + \Phi_1 \overset{(n-1)}{y} + \cdots + \Phi_{n-1} y' + \Phi_n y = 0 \tag{3}$$

в котором функции

$$\Phi_k = \Phi_k(x)$$
$$(k=0, 1, 2, \ldots, n)$$

представляют многочлены по

$$f_{kj}, f'_{kj}, \ldots, \overset{(n-1)}{f_{kj}}.$$

Каждое уравнение (1), преобразуемое в одну систему вида (2), называется **п р и в о д и м ы м.**[1])

---

1) Об общем понятии приводимости диференциальных уравнений см.:

1^0 P. P a i n l e v é, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm*, Paris, 1897, p. 487;

2^0 E. G o u r s a t, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss, Actualités scientifiques et industrielles*, № 333, Paris 1936, p. 70.

Надлежащим выбором произвольных функций f_{kj}, можем систематическим образом составить уравнения типа (1), коэффициенты которых будут функциями от x:

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \ldots \varphi_n$$

и будут заранее определенного вида. Это исполнимо различными способами, что подробно показано в тексте на сербском языке.

В виду того, что систему (2) можно всегда интегрировать при помощи квадратур, то будет возможна и интеграция уравнения (3), полученного, исходя из системы (2).

Предшествующий результат можно обобщить, если вместо выражений вида

$$a_0(x)\,y' + a_1(x)\,y,$$

взять за первую часть реляций (2) выражения вида:

$$A_0(x)\,y^{(k)} + A_1(x)\,y^{(k-1)} + \cdots + A_{k-1}(x)\,y' + A_k(x)\,y$$

(k = целое положительное число).

2. Систему (2) можно использовать, например, для изложения всей теории интеграции линейных диференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, потому что эти уравнения приводимы в том смысле, как мы это уже определили.

Если уравнение (1) приводимо, будет приводимо тоже и уравнение

$$\varphi_0\,y^{(n)} + \varphi_1\,y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n\,y = \omega(x) \tag{4}$$

и тогда система (2) примет вид ($y_0 = y$)

$$\begin{gathered} f_{k1}\,y'_{k-1} + f_{k2}\,y_{k-1} = y_k, \\ f_{n1}\,y'_{n-1} + f_{n2}\,y_{n-1} = \omega(x) \\ (k = 1, 2, \ldots, n-1) \end{gathered} \tag{5}$$

Если уравнение (4) приводимо, вместо того, что бы применить прием вариации постоянного, можем использовать способ состоящийся в интеграции системы (5), соответствующей уравнению (4). Рассматриваемая интеграция исполняется, исходя от последнего уравнения системы, приближаясь постепенно к первому уравнению.

$$f_{11}\,y' + f_{12}\,y = y_1.$$

В статье на сербском языке детально применен указанный способ к уравнениям вида:

$$y'' + (ax+b)\,y' + (Ax^2 + Bx + C)\,y = 0,$$

$$y'' + \left(a\,e^{sx} + b\right)y' + \left(A\,e^{2sx} + B\,e^{sx} + C\right)y = 0,$$

где s, a, b, A, B, C представляют постоянные величины, и показано, что многочисленные случаи интегрируемости, которые были раньше известны, истекают из одного общего источника.

D. S. MITRINOVITCH

PROCÉDÉ DE FORMATION DES CRITÈRES D'INTÉGRABILITÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS AYANT DES FORMES DONNÉES À L'AVANCE

(*Résumé*)

I.

1. On envisage l'équation differentielle linéaire d'ordre n:

$$\varphi_0\, y^{(n)}+\varphi_1\, y^{(n-1)}+\cdots+\varphi_{n-1} y'+\varphi_n y=0, \tag{1}$$

où[1])

$$\varphi_k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots,n)$$

sont des fonctions données de la variable x.

Parallèlement, on considère le système d'équations linéaires du premier ordre:

$$\begin{aligned} &f_{k1}\, y'_{k-1}+f_{k2}\, y_{k-1}=y_k,\\ &f_{n1}\, y'_{n-1}+f_{n2}\, y_{n-1}=0,\\ &(y_0=y;\quad k=1,\ 2,\ldots,n-1), \end{aligned} \tag{2}$$

où f_{kj} sont des fonctions de x satisfaisant aux conditions suivantes:

1⁰ $\quad f_{k1}\neq 0 \qquad (k=1,\ 2,\ldots,n);$

2⁰ $\quad f_{kj} \qquad (k=1,\ 2,\ldots,n;\ \ j=1,\ 2)$

sont des fonctions continues et dérivables.

Si l'on élimine les $(n-1)$ fonctions

$$y_1,\ y_2,\ldots,y_{n-1}$$

entre les n équations (2), on trouve une équation linéaire d'ordre n:

$$\Phi_0 y^{(n)}+\Phi_1 y^{(n-1)}+\cdots+\Phi_{n-1} y'+\Phi_n y=0, \tag{3}$$

où les fonctions

$$\Phi_k=\Phi_k(x)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots,n)$$

sont des polynômes en

$$f_{kj},\ f'_{kj},\ f''_{kj},\ldots,f_{kj}^{(n-1)}.$$

---

1) Dans cette étude les accents désignent des dérivées prises par rapport à la variable x.

Toute l'équation (1), transformable en un système de la forme (2), s'appele réductible[1]).

Par un choix convenable des fonctions arbitraires f_{kj}, on peut construire, d'une manière systématique, des équations du type (1), dont les coefficients-fonctions de x:

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

auront des formes assignées par avance. Cela peut se réaliser de diverses manières, ce qui sera illustré dans des pages suivantes.

Le système (2) étant toujours intégrable par quadratures, il en sera de même de l'équation (3), fournie à partir du système (2).

Le résultat précédent peut être généralisé, lorsque dans le premier membre des relations (2) on considère des expressions de la forme

$$A_0(x)\, y^{(k)} + A_1(x)\, y^{(k-1)} + \cdots + A_{k-1}(x)\, y' + A_k(x)\, y$$

$$(k = \text{entier positif})$$

au lieu des expressions de la forme

$$a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y.$$

2. Le système (2) peut être employé, par exemple, dans le but d'exposer toute la théorie d'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, car ces équations-ci sont réductibles dans le sens déjà précisé.

Si l'équation (1) est réductible, il en est de même de l'équation

$$\varphi_0 y^{(n)} + \varphi_1 y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_n y = \omega(x), \tag{4}$$

et dans ce cas le système (2) sera de la forme ($y_0 = y$)

$$\begin{aligned} f_{k1}\, y'_{k-1} + f_{k2}\, y_{k-1} &= y_k, \\ f_{n1}\, y'_{n-1} + f_{n2}\, y_{n-1} &= \omega(x) \\ (k = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{5}$$

Dans le cas où l'équation (4) est réductible, on peut utiliser, au lieu de la méthode de variation des constantes arbitraires, le procédé consistant dans l'intégration du système (5) qui correspond à l'équation (4). L'intégration en question s'effectue en partant de la dernière équation du système (5) et en continuant de proche en proche vers la première équation

$$f_{11}\, y' + f_{12}\, y = y_1 \tag{6}$$

---

1) Sur la notion générale de réductibilité des équations différentielles, *cf.* par exemple:

1° P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm*, Paris, 1897, p. 487;

2° E. Coursat, *Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss*, Actualités scientifiques et industrielles, № 333, Paris, 1936, p. 70.

II.

3. Comme première application des remarques indiquées, on propose de trouver des critères d'intégrabilité par quadratures de l'équation linéaire du second ordre

$$y''+(ax+b)y'+(\alpha x^2+\beta x+\gamma)y=0, \tag{7}$$

où a, b, α, β, γ désignent des constantes arbitraires.

Simultanément avec l'équation (7) on considère le système intégrable

$$\begin{aligned} f(x)\,y'+g(x)\,y&=z,\\ z'+h(x)\,z&=0, \end{aligned} \tag{8}$$

d'où il provient, par l'élimination de z,

$$f\,y''+(f'+g+fh)\,y'+(g'+gh)y=0. \tag{9}$$

Une condition suffisante pour que l'équation (9) soit de la forme (7) sera:

$$\begin{aligned} f(x)&\equiv 1,\\ g(x)&\equiv \lambda_1 x+\mu_1,\\ h(x)&\equiv \lambda_2 x+\mu_2, \end{aligned} \tag{10}$$

où λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 sont des constantes arbitraires.

L'équation (9), en vertu des expressions (10), prend la forme

$$\begin{aligned} y''&+[(\lambda_1+\lambda_2)\,x+(\mu_1+\mu_2)]\,y'\\ &+[\lambda_1\lambda_2 x^2+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\,x+(\mu_1\mu_2+\lambda_1)]\,y=0. \end{aligned} \tag{11}$$

De la comparaison des équations (7) et (11), on tire

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2&=a,\\ \lambda_1\lambda_2&=\alpha,\\ \mu_1+\mu_2&=b,\\ \mu_1\mu_2+\lambda_1&=\gamma,\\ \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1&=\beta. \end{aligned} \tag{12}$$

Lorsqu'on désigne par a, b des constantes arbitraires et par p, q deux paramètres introduits pour que les formules soient plus commodes, on peut, après la résolution du système (12), énoncer les résultats suivants:

Proposition I. *L'équation* (7), *dans le cas où*

$$\begin{aligned} \alpha&=-p\,(a+p),\\ \beta&=-aq-bp-2pq,\\ \gamma&=a+p-q\,(b+q), \end{aligned}$$

est réductible au système intégrable

$$\begin{aligned} y'+[(a+p)\,x+(b+q)]\,y&=z,\\ z'-(px+q)\,z&=0. \end{aligned}$$

Proposition II. *L'équation* (7), *avec*

$$\alpha = -p\,(a+p),$$

$$\beta = (a+p)\,(b+q)+pq,$$

$$\gamma = a+p-q\,(b+q),$$

est réductible au système intégrable

$$y' + [(a+p)\,x-q]\,y = z,$$

$$z' + [-px+(b+q]\,z = 0.$$

Proposition III. *L'équation* (7), *avec*

$$\alpha = -p\,(a+p),$$

$$\beta = (a+p)(b+q)+pq,$$

$$\gamma = -p-q\,(b+q),$$

est réductible au système intégrable

$$y' + [-px+(b+q)]\,y = z,$$

$$z' + [(a+p)\,x-q]\,z = 0.$$

Proposition IV. *L'équation* (7), *où*

$$\alpha = -p\,(a+p),$$

$$\beta = -aq-bp-2pq,$$

$$\gamma = -p-q\,(b+q),$$

est réductible au système intégrable

$$y' - (px+q)\,y = z,$$

$$z' + [(a+p)\,x+(b+q)]\,z = 0.$$

4. L'utilité du procédé indiqué, fournissant des critères d'intégrabilité, s'est confirmé déjà par l'équation (7). Les résultats formulés dans les quatre propositions précitées ne se trouvent pas dans le Recueil des équations différentielles de Kamke[1]). D'autre part, de nombreuses équations différentielles particulières du type (7), indiquées chez Kamke, jouissent de la propriété suivante:

1° Elles sont réductibles dans le sens adopté;

2° Elles présentent des cas particuliers dérivant d'une source commune, donnée dans cette étude[2]).

A titre d'exemple, prenons l'équation différentielle:

$$y'' + xy' + (\alpha x^2+\gamma)\,y = 0 \tag{13}$$

1) E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen,* Bd. I, 3. Auflage, Leipzig, 1944; *cf.* particulièrement p. 413–417, p. 641.—Dans la suite, ce Traité sera cité, en abrégé, par Kamke.

2) Ceci est avec détail développé dans le texte serbe de cette étude. *Voir,* particulièrement, les §§ 9 11 en liaison avec le § 2.

présentant un cas particulier de l'équation (7) pour

$$a=1, \quad b=0, \quad \beta=0.$$

Les cas d'intégrabilité connus de l'équation (13), d'après K a m k e[1], sont les deux suivants:

1⁰ $\alpha=\frac{1}{4}, \quad \gamma=\frac{1}{2}$ (cas de G o l d s c h e i d e r);

2⁰ $\alpha=\frac{1}{4}, \quad \gamma\neq\frac{1}{2}$ (cas de K a m k e).

En appliquant à l'équation (13) la proposition I, formulée précédemment, on fournit les résultats suivants qui renferment ceux de G o l d s c h e i d e r et de K a m k e, comme des cas particuliers:

1⁰ *Lorsque la condition*

$$\alpha=\gamma(1-\gamma)$$

est satisfaite, l'équation (13), *avec*

$$\alpha=-p(1+p),$$

$$\gamma=1+p$$

(p = paramètre arbitraire)

est réductible au système intégrable

$$y'+(1+p)xy=z,$$

$$z'-pxz=0.$$

Au cas particulier $\alpha=\frac{1}{4}$ correspond $\gamma=\frac{1}{2}\left(\text{ici } p=-\frac{1}{2}\right)$, ce qui est le résultat de G o l d s c h e i d e r;

2⁰ *Lorsqu'on a:*

$$\alpha=\frac{1}{4}, \quad \gamma=\frac{1}{2}-q^2$$

(q = paramètre arbitraire),

l'équation correspondante (13) *est réductible au système intégrable*

$$y'+\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)y=z,$$

$$z'+\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)z=0,$$

et c'est précisément le cas de K a m k e.

Par conséquent, on voit que les équations de G o l d s c h e i d e r et de K a m k e sont réductibles et que ces deux cas particuliers de l'équation (13) dérivent aussi d'une source commune.

---

1) K a m k e, p. 641.

5. Relativement à l'équation différentielle

$$y'' + (a e^{sx} + b) y' + (A e^{2sx} + B e^{sx} + C) y = 0, \tag{14}$$

où a, b, s, A, B, C sont des constantes arbitraires, on énonce le résultat suivant:

Proposition V. *Les coefficients* a *et* b *désignant des constantes arbitraires,* A *et* C *étant de la forme*

$$A = -p(a+p),$$

$$C = -q(b+q),$$

où p *et* q *désignent deux paramètres arbitraires, l'équation* (14) *est réductible:*

1° *au système intégrable*

$$y' + \left[(a+p) e^{sx} + (b+q)\right] y = z,$$

$$z' - \left(p e^{sx} + q\right) z = 0,$$

dans le cas où

$$B = s(a+p) - 2pq - aq - bp;$$

2° *au système intégrable*

$$y' + \left[(a+p) e^{sx} - q\right] y = z,$$

$$z' + \left[-p e^{sx} + (b+q)\right] z = 0,$$

dans le cas où

$$B = s(a+p) + ab + aq + bp + 2pq;$$

3° *au système intégrable*

$$y' + \left[-p e^{sx} + (b+q)\right] y = z,$$

$$z' + \left[(a+p) e^{sx} - q\right] z = 0,$$

dans le cas où

$$B = -sp + ab + aq + bp + 2pq;$$

4° *au système intégrable*

$$y' - \left(p e^{sx} + q\right) y = z,$$

$$z' + \left[(a+p) e^{sx} + (b+q)\right] z = 0,$$

dans le cas où

$$B = -sp - aq - bp - 2pq.$$

Le procédé en question, appliqué à l'équation (14), a fourni la proposition V, ce qui met en évidence de nouveau:

1° que ce procédé pourrait conduire à des résultats de plus en plus intéressants, lorsqu'on l'appliquait d'une manière systématique;

2⁰ que le même procédé est notamment convenable pour un complètement du Recueil de Kamke qui s'est montré déjà si utile dans des recherches relatives à des sciences techniques et appliquées.

6. D'autres critères d'intégrabilité de l'équation (7), en dehors de ceux cités plus haut, s'obtiendront en partant de l'équation (9), dans laquelle les fonctions f, g, h ont, par exemple, les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv (x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_s), \\ g(x) &\equiv \lambda_1 x^{s+1} + \lambda_2 x^s + \cdots + \lambda_{s+1}x + \lambda_{s+2}, \\ h(x) &\equiv \mu_1 x + \mu_2 \end{aligned} \tag{15}$$

où les coefficients:

$$\begin{aligned} &k_1, k_2, \ldots, k_s; \\ &\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{s+2}; \\ &\mu_1, \mu_2 \end{aligned} \tag{16}$$

sont des constantes arbitraires.

En choisissant les paramètres (16) et le nombre naturel s sous la condition que les polynômes

$$f'+g+fh, \quad g'+gh,$$

déterminés par (15), soient divisibles sans reste par le polynôme f, on trouvera de nouveaux critères d'intégrabilité de l'équation (7).

Nous allons étudier ceci et d'autres questions connexes dans un autre travail.