ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

ПОСТУПАК ЗА ФОРМИРАЊЕ КРИТЕРИЈУМА ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЛИНЕАРНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ЧИЈИ КОЕФИЦИЈЕНТИ ИМАЈУ ОБЛИКЕ УНАПРЕД ДАТЕ

УВОД

1. Линеарне диференцијалне једначине играју важну улогу у многобројним техничким, физичким и астрономским проблемима. Стога је проучавању тих једначина посвећена изванредна пажња. О линеарним једначинама постоје специјални уџбеници[1]) и приручници[2]). Неке линеарне једначине специјалног типа, које су од већег значаја у теориским и практичним питањима, изазвале су такав интерес, да о њима данас постоји богата литература. Такве су, на пример, диференцијалне једначине:

1^0 Bessel-ова једначина[3]):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (1)$$
$$(\nu = \mathrm{Const});$$

---

[1]) *Видети*, на пример,

L. Hefter, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen*, Teubner, Leipzig, 1894, XIV+258 S.

[2]) *Видети*, на пример,

L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Bd. I (1895), XX+486 S., Bd. II_1 (1897), XVIII+532 S., Bd. II_2 (1898), XIV+446 S., Leipzig, Teubner.

[3]) *Видети*, на пример,

E. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen, 3. Auflage, Leipzig, 1944, S. 437, Gl. 2.162.

Ово дело биће у будуће цитирано укратко са Kamke I. Ознака S. 437, Gl. 2.162 значи да се односна једначина налази на страни 437 и да је нумерисана са 2.162.

2⁰ Hill-ова једначина[1]):

$$y'' + [\Phi(x) + \lambda] y = 0, \tag{2}$$

где је

$$\lambda = \text{Const},$$

$$\Phi = \text{периодична функција променљиве } x;$$

3⁰ Хипергеометриска једначина[2]):

$$x(x-1) y'' + [(\alpha+\beta+1) x - \gamma] y' + \alpha\beta y = 0 \tag{3}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = \text{Const});$$

4⁰ Legendre-ова једначина[3]);

$$(x^2 - 1) y'' + 2xy' - \nu(\nu+1) y = 0 \tag{4}$$

$$(\nu = \text{Const});$$

5⁰ Laplace-ова једначина[4]):

$$(a_2 x + b_2) y'' + (a_1 x + b_1) y' + (a_0 x + b_0) y = 0 \tag{5}$$

$$(a_\nu,\ b_\nu = \text{Const});$$

6⁰ Weber-ова једначина[5]):

$$4 y'' = (x^2 + a) y \tag{6}$$

$$(a = \text{Const});$$

7⁰ Mathieu-ова једначина[6]):

$$y'' + (a \cos 2x + b) y = 0 \tag{7}$$

$$(a, b = \text{Const});$$

8⁰ Lamé-ова једначина[7]):

$$y'' + (a\, sn^2 x + b) y = 0 \tag{8}$$

$$(a, b = \text{Const});$$

9⁰ Конфлуентна хипергеометриска једначина[8])

$$xy'' + (b - x) y' - ay = 0 \tag{9}$$

$$(a, b = \text{Const}).$$

---

[1]) Kamke I, S. 410, Gl. 2.30.
[2]) Kamke I, S. 465, Gl. 2.260.
[3]) Kamke I, S. 455, Gl. 2.240.
[4]) Kamke I, S. 434, Gl. 2.145.
[5]) Kamke I, S. 421, Gl. 2.87.
[6]) Kamke I, S. 404, Gl. 2.22.
[7]) Kamke I, S. 410, Gl. 2.27.
[8]) Kamke I, S. 427, Gl. 2.113.

2. Kamke-ова збирка[1]) која садржи преко 1600 обичних диференцијалних једначина, поређаних лексиграфски, даје преглед до сада познатих резултата у математичкој литератури о тим једначинама.

Анализирајући наведену збирку, закључује се да она има великих празнина, чак и у случају када се ради о линеарним диференцијалним једначинама којима је посвећена огромна литература.

Тако, на пример, посматрајмо диференцијалну једначину

$$y'' + (ax+b)\,y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,y = 0, \tag{10}$$

где су a, b, α, β, γ ма какве константе.

У случају када је

$$\alpha = 0,$$

једначина (10) припада типу Laplace-ових једначина (5).

У Kamke-овој збирци налазе се о једначини (10) ови подаци:

1° Сменом[2])

$$y = u(x)\,exp\,(sx^2),$$

где је s решење једначине

$$4s^2 + 2as + \alpha = 0,$$

диференцијална једначина (10) добија вид

$$\begin{aligned} u'' &+ [(a+4s)\,x + b]\,u' \\ &+ [(\beta + 2bs)\,x + (\gamma + 2s)]\,u = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ова једначина спада у класу Laplace-ових једначина (5). Тиме је успостављена веза између једначине (10) и Laplace-ове једначине типа:

$$y'' + (ax+b)\,y' + (Ax+B)\,y = 0.$$

2° Специјални облик једначине (10) jесте Craig-ова једначина[2]):

$$y'' - 2\,(ax+b)\,y' + [(ax+b)^2 - a]\,y = 0, \tag{12}$$

чије је опште решење

$$y = K_1\,y_1 + K_2\,y_2$$

$$(K_1, K_2 = \text{интеграционе константе}),$$

---

[1]) Kamke I, S. 289—680 (одељак: *C. Einzel-Differentialgleichungen*).
[2]) Kamke I, S. 417, Gl. 2.55.

где је

$$y_1 = exp\left(\frac{a}{2}x^2 + bx\right),$$

$$y_2 = y_1'.$$

3^0 Партикуларни случај једначине (10) јесте Forsyth-Jacobsthal-ов пример:

$$y'' + 2\,a\,x\,y' + a^2\,x^2\,y = 0. \tag{13}$$

Ова се једначина интеграли помоћу квадратура[1]).

4^0 Једначине

$$y'' + 4\,xy' + (4\,x^2 + 2)\,y = 0, \tag{14}$$

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 - 1)\,y = 0, \tag{15}$$

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 - 2)\,y = 0, \tag{16}$$

$$y'' - 4\,xy' + (4\,x^2 - 3)\,y = 0 \tag{17}$$

припадају типу (10) и све су оне интеграбилне[2]).

5^0 Једначина[3])

$$y'' - 4\,xy' + (3\,x^2 + 2n - 1)\,y = 0, \tag{18}$$

сменом

$$y = e^{x^2}\,u\,(x),$$

постаје

$$u'' - (x^2 - 2n - 1)\,u = 0$$

и припада класи Weber-ових једначина[4])

$$u'' - (x^2 + a)\,u = 0.$$

6^0 Једначина[5])

$$y'' - (a^2\,x^2 + a)\,y = 0 \tag{19}$$

као и њен специјални случај[6])

$$y'' - (x^2 + 1)\,y = 0 \tag{20}$$

јесу интеграбилне.

[1]) Kamke I, S. 416, Gl. 2.53.
[2]) Kamke I, S. 415, Gl. 2.47; S. 416, Gl. 2.49; Gl. 2.50; Gl. 2.51.
[3]) Kamke I, S. 415, Gl. 2.48.
[4]) Kamke I, S. 400, Gl. 2.12.
[5]) Kamke I, S. 401, Gl. 2.13.
[6]) Kamke I, S. 400, Gl. 2.11

Исти је случај и са једначином

$$y'' - (x^2 + 3)\, y = 0 \tag{21}$$

коју је интегралио Goldscheider[1]).

7° Једначина[2])

$$y'' + xy' + (bx^2 + a)\, y = 0 \tag{22}$$

интеграбилна је у ова два случаја:

$b = \frac{1}{4}, \quad a \neq \frac{1}{2}$ (Kamke-ов случај);

$b = \frac{1}{4}, \quad a = \frac{1}{2}$ (Goldscheider-ов случај).

3. Из изнетог се види да је интеграција једначине (10) помоћу квадратура позната у малом броју случајева. Стога је од интереса тражити нове критеријуме интеграбилитета те једначине.

У овој расправи наводимо доста опште случајеве у којима је једначина (10) интеграбилна и показујемо да готово све једначине наведене у § 2 имају *заједничку особину: да се могу свести на систем једначича облика*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + (\lambda_1 x + \mu_1)\, y &= z, \\ \frac{dz}{dx} + (\lambda_2 x + \mu_2)\, z &= 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где су

$$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \mu_1, \ \mu_2$$

константе које ћемо одредити.

4. У овој расправи дајемо један поступак за формирање интеграбилних линеарних једначина **одређеног типа,** на пример (10). Тај поступак који је општијег карактера састоји се у овоме.

Посматрајмо линеарну диференцијалну једначину реда n, одређеног типа,

$$\varphi_0(x)\, y^{(n)} + \varphi_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + \varphi_{n-1}(x)\, y' + \varphi_n(x)\, y = 0, \tag{24}$$

тј. једначину (24) у којој су облици функција

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \ \varphi_n$$

дати унапред.

---

[1]) Kamke I, S. 640, Gl. 2.11a
[2]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.63a

Упоредо са једначином (24) уочимо систем линеарних једначина првог реда:

$$
\begin{aligned}
&f_{11}\,y' + f_{12}\,y = y_1, \\
&f_{21}\,y_1' + f_{22}\,y_1 = y_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f_{k1}\,y_{k-2}' + f_{k2}\,y_{k-2} = y_{k-1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f_{n-1,1}\,y_{n-2}' + f_{n-1,2}\,y_{n-2} = y_{n-1}, \\
&f_{n1}\,y_{n-1}' + f_{n2}\,y_{n-1} = 0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где су f_{kj} функције од x које задовољавају ове услове:

1⁰ $f_{k1} \neq 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$;

2⁰ функције f_{kj} $(k = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2)$ јесу непрекидне у посматраном интервалу независно промењиве;

3⁰ егзистирају изводи

$$f'_{kj} = \frac{df_{kj}}{dx}$$

$$f''_{kj} = \frac{d^2 f_{kj}}{dx^2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(k = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2)$$

који се појављују у формулама.

Ако се из система (25) елиминише $(n-1)$ функција

$$y_1, y_2, \dots, y_{n-1},$$

добија се линеарна диференцијална једначина реда n:

$$\Phi_0(x)\,y^{(n)} + \Phi_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + \Phi_{n-1}(x)\,y' + \Phi_n(x)\,y = 0, \tag{26}$$

у којој коефицијенти $\Phi_\nu(x)$ претстављају полиноме по функцијама

$$f_{kj} \qquad (k = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2)$$

и по њиховим изводима

$$\frac{df_{kj}}{dx}, \ \frac{d^2 f_{kj}}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} f_{kj}}{dx^{n-1}}.$$

Подесним избором облика функција

$$f_{kj} \qquad (k = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2)$$

могу се конструисати такве једначине (26) које ће улазити у класу једначина (24) која је унапред дата.

Диференцијалне једначине (26), класе (24), добијене на наведени начин биће *интеграбилне*, јер је систем диференцијалних једначина (25) интеграбилан за ма какав облик функција

$$f_{kj}(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n; \quad j=1, 2)$$

уз раније наведена ограничења која се односе на непрекидност и егзистенцију извода тих функција.

Једначина (26) која је формирана по описаном поступку има за партикуларно решење функцију:

$$exp\left(-\int \frac{f_{12}}{f_{11}} dx\right).$$

Систем (25) се интеграли на тај начин што се, полазећи од последње између једначина (25), прво нађе y_{n-1}, затим y_{n-2}, итд. и најзад y.

За диференцијалну једначину (24) која је еквивалентна систему линеарних једначина (25) каже се да је сводљива[1]) (réductible).

Наведеним поступком могу се у знатној мери попунити празнине у Kamke-овој збирци диференцијалних једначина. Већ из тог разлога, поступак о коме је овде реч претставља известан интерес.

Глава прва

КРИТЕРИЈУМИ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЈЕДНАЧИНЕ

$$y'' + (ax+b)\, y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y = 0.$$

5. Упоредо са овом диференцијалном једначином посматрајмо систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} f(x)\, y' + g(x)\, y &= z, \\ z' + h(x)\, z &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

---

[1]) О општем појму *сводљивости* (réductibilité) видети, на пример P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, professées à Stockholm, Paris, 1897, p. 487;

E. Goursat, *Propriétés générales de l'équation* d'Euler *et de* Gauss. Actualités scientifiques et industrielles, fasc 333, 1936 (Paris, Hermann), p. 70.

који је интеграбилан за ма какве облике функција[1]):

$$f(x) \neq 0, \quad g(x), \quad h(x).$$

Елиминацијом z из система (27) добија се:

$$f y'' + (f' + g + f h) y' + (g' + g h) y = 0. \tag{28}$$

Један довољан услов да би једначина (28) била типа (10) јесте:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv 1, \\ g(x) &\equiv \lambda_1 x + \mu_1, \\ h(x) &\equiv \lambda_2 x + \mu_2, \end{aligned} \tag{29}$$

где су λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 ма какве константе.

Једначина (28), према (29), постаје:

$$\begin{aligned} y'' &+ [(\lambda_1 + \lambda_2) x + (\mu_1 + \mu_2)] y' \\ &+ [\lambda_1 \lambda_2 x^2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) x + (\mu_1 \mu_2 + \lambda_1)] y = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Поређењем једначина (10) и (30) добивају се релације:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a, \tag{31}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \alpha, \tag{32}$$

$$\mu_1 + \mu_2 = b, \tag{33}$$

$$\mu_1 \mu_2 + \lambda_1 = \gamma, \tag{34}$$

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 = \beta. \tag{35}$$

Једначине (31), (32), (33), и (34) имају по параметрима

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$$

ова четири система решења:

Први систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a + R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b + R_2}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a - R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b - R_2}{2}; \end{aligned} \tag{36}$$

Други систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a + R_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{b - R_2}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a - R_1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{b + R_2}{2}, \end{aligned} \tag{37}$$

---

[1]) Наведени услови у § 4 о непрекидности тих функција као и о егзистенцији њихових извода и овде се претпостављају.

где R_1 и R_2 имају ове вредности:

$$\begin{aligned} R_1 &= +\sqrt{a^2-4\alpha}, \\ R_2 &= +\sqrt{b^2-4(\gamma-\lambda_1)} \\ &= +\sqrt{b^2-4\gamma+2a+2R_1}; \end{aligned} \tag{38}$$

Трећи систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a-R_1}{2}, \quad & \mu_1 &= \frac{b+R_3}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a+R_1}{2}, \quad & \mu_2 &= \frac{b-R_3}{2}; \end{aligned} \tag{39}$$

Четврти систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a-R_1}{2}, \quad & \mu_1 &= \frac{b-R_3}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a+R_1}{2}, \quad & \mu_2 &= \frac{b+R_3}{2}, \end{aligned} \tag{40}$$

где је R_1 напред дефинисани израз, а R_3 израз облика:

$$\begin{aligned} R_3 &= +\sqrt{b^2-4(\gamma-\lambda_1)} \\ &= +\sqrt{b^2-4\gamma+2a-2R_1}. \end{aligned} \tag{41}$$

Када се у релацији (35) замене, једна за другом, вредности (36), (37), (39) и (40), добијају се респективно ове релације:

$$ab-R_1R_2=2\beta, \tag{42}$$

$$ab+R_1R_2=2\beta, \tag{43}$$

$$ab+R_1R_3=2\beta, \tag{44}$$

$$ab-R_1R_3=2\beta. \tag{45}$$

6. Увођење параметра p помоћу релације

$$\alpha=-p(a+p)$$

има за ефекат да R_1 добије прост облик

$$R_1=a+2p \tag{46}$$

и тада се корен R_2 може написати овако:

$$R_1=\sqrt{b^2-4(\gamma-a-p)}.$$

Увођењем једног новог параметра q помоћу релације

$$\gamma-a-p=-q(b+q),$$

корен R_2 добија исто тако једноставан облик:

$$R_2 = b + 2q. \tag{47}$$

Системи решења (36) и (37) — први и други систем, с обзиром на (46) и (47), узимају респективно ове просте форме:

Први систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + p, & \mu_1 &= b + q, \\ \lambda_2 &= -p, & \mu_2 &= -q; \end{aligned} \tag{48}$$

Други систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a + p, & \mu_1 &= -q, \\ \lambda_2 &= -p, & \mu_2 &= b + q. \end{aligned} \tag{49}$$

Услови (42) и (43) постају респективно:

$$-bp - aq - 2pq = \beta, \tag{50}$$

$$ab + bp + aq + 2pq = \beta. \tag{51}$$

На основу наведених чињеница, могу се формулисати следећа два става:

Став I. *Диференцијална једначина*

$$y'' + (ax + b)\, y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y = 0, \tag{52}$$

у случају када је

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a + p), \\ \beta &= -aq - bp - 2pq \\ &= -p\,(b + q) - q\,(a + p), \\ \gamma &= a + p - q\,(b + q), \end{aligned} \tag{53}$$

(a, b, p, q = произвољни параметри),

сводљива је на интеграбилан систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} &y' + [(a + p)\, x + (b + q)]\, y = z, \\ &z' - (px + q)\, z = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Став II. *Диференцијална једначина* (52), *у којој је:*

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a + p), \\ \beta &= ab + bp + aq + 2pq \\ &= (a + p)\,(b + q) + pq, \\ \gamma &= a + p - q\,(b + q), \end{aligned} \tag{55}$$

(a, b, p, q = произвољни параметри), *своддива је на интеграбилан систем линеарних једначина:*

$$\begin{aligned} y' + [(a+p)\,x - q]\,y &= z, \\ z' + [-px + (b+q)]\,z &= 0. \end{aligned} \tag{56}$$

7. С обзиром на израз R_1, дефинисан формулом (46), корен R_3 дат релацијом (41) постаје

$$R_3 = \sqrt{b^2 - 4\,(\gamma + p)}\,.$$

Ако се овде стави

$$\gamma + p = -q\,(b+q),$$

где је q један параметар, има се:

$$R_3 = b + 2\,q\,. \tag{57}$$

Системи (39) и (40) — трећи и четврти систем, добијају респективно ове облике:

Трећи систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -p, & \mu_1 &= b+q, \\ \lambda_2 &= a+p, & \mu_2 &= -q; \end{aligned} \tag{58}$$

Четврти систем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -p, & \mu_1 &= -q, \\ \lambda_2 &= a+p, & \mu_2 &= b+q\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Услови (44) и (45) постају респективно:

$$ab + bp + aq + 2\,pq = \beta, \tag{60}$$

$$-aq - bp - 2\,pq = \beta\,. \tag{61}$$

На основу претходних резултата могу се исказати ова два става:

Став III. *Диференцијална једначина*

$$y'' + (ax+b)\,y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,y = 0, \tag{62}$$

где је:

$$\begin{aligned} \alpha &= -p\,(a+p), \\ \beta &= ab + bp + aq + 2\,pq \\ &= (a+p)\,(b+q) + pq, \\ \gamma &= -p - q\,(b+q) \end{aligned} \tag{63}$$

(a, b, p, q = произвољни параметри) *може се свести на интеграбилан систем линеарних једначина:*

$$
\begin{aligned}
y' + [-px + (b+q)]y &= z, \\
z' + [(a+p)x - q]z &= 0.
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Став IV. *Диференцијална једначина* (62), *у којој је:*

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -p(a+p), \\
\beta &= -aq - bp - 2pq \\
&= -p(b+q) - q(a+p), \\
\gamma &= -p - q(b+q)
\end{aligned}
\tag{65}
$$

сводљива је на интеграбилан систем линеарних једначина облика:

$$
\begin{aligned}
y' - (px+q)y &= z, \\
z' + [(a+p)x + (b+q)]z &= 0.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

8. У наведеним ставовима интеграција једначине (10), под извесним условима, сведена је на интеграцију система линеарних једначина облика:

$$
\begin{aligned}
y' + (\lambda_1 x + \mu_1)y &= z, \\
z' + (\lambda_2 x + \mu_2)z &= 0.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Из последње једначине излази:

$$
z = K_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda_2 x^2 - \mu_2 x}.
$$

Прва једначина даје

$$
\begin{aligned}
y = {} & K_2 e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_1 x} \\
& + K_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_1 x} \int exp\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} x^2 + (\mu_1 - \mu_2)x\right] dx,
\end{aligned}
\tag{68}
$$

где су K_1 и K_2 интеграционе константе.

Посматрајмо интеграл

$$
J(x, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \int exp\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} x^2 + (\mu_1 - \mu_2)x\right] dx,
$$

и наведемо ове његове партикуларне случајеве:

$$
J(x, \lambda_1, \lambda_1, \mu_1, \mu_2) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_1 - \mu_2)x} \qquad (\mu_1 \neq \mu_2);
$$

$$
J(x, \lambda_1, \lambda_1, \mu_1, \mu_1) = x.
$$

За случај:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \mu_1 \neq \mu_2,$$

опште решење (68) добија облик

$$y = K_2\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_1 x} + K_1\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 x^2 - \mu_2 x} \tag{69}$$

где је место $\dfrac{1}{\mu_1 - \mu_2} K_1$ стављено K_1.

Када је

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \mu_1 = \mu_2,$$

опште решење (68) добија једноставан облик

$$y = (K_1 x + K_2)\, exp\left(-\frac{\lambda_1}{2} x^2 - \mu_1 x\right). \tag{70}$$

9. Craig-ова једначина (12) своддьива је на систем:

$$\begin{aligned} y' - (ax + b) y &= z, \\ z' - (ax + b) z &= 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Forsyth-Jacobsthal-ова једначина (13) своди се на систем:

$$y' + (ax + \sqrt{a})\, y = z,$$

$$z' + (ax - \sqrt{a})\, z = 0. \tag{72}$$

Диференцијалне једначине (14), (15), (16) и (17) сводљиве су респективно на системе једначина:

$$\left.\begin{aligned} y' + 2\,xy &= z, \\ z' + 2\,xz &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

$$\left.\begin{aligned} y' - (2\,x - i)\, y &= z, \\ z' - (2\,x + i)\, z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

$$(i = \sqrt{-1});$$

$$\left.\begin{aligned} y' - 2\,xy &= z, \\ z' - 2\,xz &= 0; \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned} y' - (2\,x - 1)\, y &= z, \\ z' - (2\,x + 1)\, z &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Једначина

$$y'' - 4xy' + (4x^2 + k) = 0 \qquad (77)$$
$$(k = \mathrm{const})$$

која обухвата једначине (15), (16) и (17), као партикуларне случајеве, своддива је на систем

$$\begin{aligned} y' - (2x - \sqrt{-k-2})\,y &= z, \\ z' - (2x + \sqrt{-k-2})\,z &= 0. \end{aligned} \qquad (78)$$

10. Посматрајмо сада једначину

$$y'' + xy' + (\alpha x^2 + \gamma)\,y = 0 \qquad (79)$$

која је партикуларни случај једначине (10), када је:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad \beta = 0.$$

Ако је

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

Goldscheider[1]) је показао да је опште решење једначине (79)

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{x^2}{4}} \qquad (80)$$

(C_1, C_2 = константе интеграције).

Kamke[2]) је утврдио да се једначина (79) интеграли такође и у случају када је:

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \gamma \neq \frac{1}{2};$$

тада опште решење гласи:

$$y = e^{-\frac{x^2}{4}} \left[C_1\, exp\left(x\sqrt{\frac{1}{2} - \gamma} \right) + C_2\, exp\left(-x\sqrt{\frac{1}{2} - \gamma} \right) \right], \qquad (81)$$

где фигуришу две произвољне константе C_1 и C_2.

Показаћемо сада да једначина (79) има и других случајева интеграбилитета осим оних које су навели Goldscheider и Kamke.

---

[1]) Kamke I, S. 641, Gl. 2.51a (код Kamke-a штампарска грешка: тамо стоји 2.41a).

[2]) *Видети* претходну примедбу.

Први став, примењен на једначину (79), даје:

$$\begin{aligned} \alpha &= -p(1+p), \\ \beta &= -q-2pq=0, \\ \gamma &= 1+p-q^2. \end{aligned} \tag{82}$$

У вези са решавањем система (82) разликоваћемо два случаја:

$$1^0 \quad q=0; \qquad 2^0 \quad p=-\frac{1}{2}.$$

Ако је $q=0$, према (82), има се:

$$\begin{aligned} \alpha &= -p(1+p), \\ \gamma &= 1+p, \end{aligned} \tag{83}$$

или. после елиминације параметра p,

$$\gamma^2-\gamma+\alpha=0. \tag{84}$$

Ако коефицијенти α и γ једначине (79) задовољавају услов (84), односно (83), тада се једначина (79) може интегралити по нашој методи, тј. она је сводљива на систем:

$$\begin{aligned} y'+(1+p)xy &= z, \\ z'-pxz &= 0 \end{aligned} \tag{85}$$

који је интеграбилан за ма какво p.

За $\alpha=\frac{1}{4}$, једначина (84) има двојни корен $\gamma=\frac{1}{2}$. Тако смо добили Goldscheider-ов случај као партикуларни случај нашег резултата.

2⁰ Када је $p=-\frac{1}{2}$, релације (82) дају:

$$\alpha=\frac{1}{4}, \qquad \gamma=\frac{1}{2}-q^2. \tag{86}$$

То је управо случај интеграбилитета који је навео Kamke.

За вредности (86) једначина (79) сводљива је на систем:

$$\begin{aligned} y'+\left(\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)y &= z, \\ z'+\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{2}-\gamma}\right)z &= 0. \end{aligned} \tag{87}$$

Овај систем даје за y решење у коначном облику (случај $\lambda_1=\lambda_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$ дискутован у § 8) које је идентично са Kamke-овим (81).

На основу изложеног видимо да је једначина (79) интеграбилна ако између α и γ постоји веза

$$\alpha = \gamma - \gamma^2. \tag{88}$$

Према томе, *диференцијална једначина*

$$y'' + xy' + [(\gamma - \gamma^2)\, x^2 + \gamma]\, y = 0$$

$$(\gamma = \text{произвољна константа})$$

може се интегралити помоћу квадратура.

Уочимо, на пример, једначину

$$y'' + xy' - (6\, x^2 + 3)\, y = 0 \tag{89}$$

која не спа а у случај Kamke-ов, јер је овде

$$\gamma = -3$$

и, према (88),

$$\alpha = -6.$$

Једначина (89) своддива је на интеграбилан систем:

$$y' + 3\, xy = z,$$
$$z' - 2\, xz = 0.$$

За $\gamma = 4$, из (88) излази $\alpha = -12$.

Према томе, једначина

$$y'' + xy' + (4 - 12\, x^2)\, y = 0$$

сводљива је на интеграбилан систем:

$$y' + 4\, xy = z$$
$$z' - 3\, xz = 0.$$

Ако бисмо пошли од ставова II, III, IV, дошли бисмо до потпуно истих закључака као и горе у вези са интеграцијом једначине (79).

11. Применићемо изведене ставове за изналажење критеријума интеграбилитета једначине

$$y'' + (ax + b)\, y' + (cx + d)\, y = 0 \tag{90}$$

која спада у класу Laplace-ових једначина (5).

Једначина (90) истовремено је партикуларан случај једначине

$$y'' + (ax + b)\, y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y = 0 \tag{91}$$

коју проучавамо у овој глави.

Поређењем једначина (90) и (91) имамо:

$$\alpha = 0, \quad \beta = c, \quad \gamma = d.$$

Применимо редом ставове I, II, III, IV на једначину (90). Став I даје условне једначине:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv -p\,(a+p) = 0, \\ \beta &\equiv -p\,(b+q) - q\,(a+p) = c, \\ \gamma &\equiv a+p-q\,(b+q) = d. \end{aligned} \tag{92}$$

С обзиром на прву од једначина (92), треба разликовати два случаја:

$$1^0 \quad p = 0; \qquad 2^0 \quad p = -a.$$

Ако је $p = 0$, систем (92) даје:

$$\begin{aligned} aq + c &= 0, \\ a - q\,(b+q) &= d. \end{aligned} \tag{93}$$

Претпоставићемо да је $a \neq 0$, јер би $a = 0$ повукло за собом $c = 0$ и тада би се једначина (90) свела на линеарну једначину са сталним коефицијентима.

Елиминацијом q из (93) добија се

$$d = a - \frac{c^2}{a^2} + \frac{bc}{a}. \tag{94}$$

Свака Laplace-ова једначина типа (90) чији коефицијенти задовољавају услов (94) своддљива је на интеграбилан систем једначина

$$y' + \left(ax + b - \frac{c}{a}\right) y = z,$$

$$z' + \frac{c}{a} z = 0.$$

Према томе, услов (94) јесте један критеријум интеграбилитета једначине (90).

За $p = -a$, систем (92) се своди на:

$$\begin{aligned} a\,(b+q) &= c, \\ -q\,(b+q) &= d. \end{aligned} \tag{95}$$

Елиминацијом q из система (95) налази се:

$$d = \frac{c\,(ab-c)}{a^2}. \tag{96}$$

Када је услов (96) задовољен, једначина (90) је интеграбилна и сводљива на систем линеарних једначина који је лако образовати.

Применом ставова II, III, IV на једначину (90) не би се дошло до других услова критеријума интеграбилитета ван оних који су дати под (94) и (96).

О једначини (90) Kamke[1]) даје овај резултат:

Сменом промењљивих

$$y(x) = \eta(x)\, exp\left(-\frac{c}{a}x\right)$$

$$\xi = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{ab-2c}{a^2}\right)$$

једначина (90) постаје

$$\eta'' \pm \xi\eta' \pm a^{-3}(c^2 - abc + a^2 d)\,\eta = 0, \tag{97}$$

где горњи знаци одговарају случају $a > 0$, а доњи случају $a < 0$.

На основу једначине (97) може се извести закључак, да је једначина (90) интеграбилна ако је задовољен услов:

$$c^2 - abc + a^2 d = 0,$$

што је у складу са критеријумом (96) који смо извели на основу наше методе.

И критеријум интеграбилитета (94) који смо горе извели може се добити на други начин. Заиста, пођимо од једначине

$$\eta'' + \xi\eta' + \eta = 0 \tag{98}$$

чији је општи интеграл[2])

$$\eta = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left(K_1 + K_2\int e^{\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi\right),$$

где су K_1 и K_2 интеграционе константе.

За $a > 0$, поређењем једначина (97) и (98) долази се до закључка да ће једначина (90) бити интеграбилна ако је

$$a^{-3}(c^2 - abc + a^2 d) = 1,$$

што се поклапа са нашим условом (94), који важи и за $a < 0$.

[1]) Kamke I, S. 416, Gl. 2.54.

[2]) Kamke I, S. 414, Gl. 2.39.

12. У овој глави исцрпно смо изнели примену нашег поступка, који је у уводу (§ 4) само скициран, на истраживање критеријума[1]) интеграбилитета једначине

$$y'' + (ax + b)\,y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,y = 0. \tag{99}$$

При томе смо констатовали:

1° *да се тим поступком могу наћи нови критеријуми интеграбилитета;*

2° *да су готово сви познати критеријуми интеграбилитета једначине* (99) *обухваћени, као партикуларни случајеви, ставовима* I – IV;

3° *да је ефективна примена поступка веома једноставна и да је тај поступак подесан за конструисање једначина ради попуњавања* Kamke-*ове збирке диференцијалних једначина,*

Пут којим се дошло до резултата за једначину (99) биће углавном исти и када је реч о једначинама другог типа.

Глава друга

КРИТЕРИЈУМИ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЈЕДНАЧИНЕ

$$y'' + (a\,e^{sx} + b)\,y' + (A\,e^{2sx} + B\,e^{sx} + C)\,y = 0.$$

13. Поставимо сада задатак да, применом нашег поступка нађемо критеријуме интеграбилитета диференцијалне једначине

$$y'' + (a\,e^{sx} + b)\,y' + (A\,e^{2sx} + B\,e^{sx} + C)\,y = 0, \tag{100}$$

[1]) Други критеријуми интеграбилитета једначине (10), осим оних наведених горе, могу се добити ако се пође, на пример, од једначине (28) у којој је

$$f(x) \equiv \prod_{\nu=1}^{\nu=s} (x - k_\nu),$$

$$g(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\nu=s+2} \lambda_\nu x^{s-\nu+2},$$

$$h(x) \equiv \mu_1 x + \mu_2$$

и ако се параметри

$$s,\ k_\nu,\ \lambda_\nu,\ \mu_\nu$$

потчине извесним условима (које овде не износимо) на основу којих се полиноми

$$f' + g + fh, \quad g' + gh$$

(f, g, h имају горе дефинисане изразе) могу поделити полиномом f без остатка. Тада се има један веома генералан критеријум интеграбилитета једначине (10).

где су: s, a, b, A, B, C ма какве константе, уз ова ограничења:

1° $s \neq 0$;

2° a, A, B нису једновремено једнаки нули.

Систем линеарних једначина који се може довести у кореспонденцију са једначином (100) има облик

$$\begin{aligned} y' + (\lambda_1 e^{sx} + \mu_1)\, y &= z, \\ z' + (\lambda_2 e^{sx} + \mu_2)\, z &= 0, \end{aligned} \tag{101}$$

где су

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$$

константе.

Елиминацијом z из система (101) налази се:

$$\begin{aligned} y'' &+ [(\lambda_1 + \lambda_2)\, e^{sx} + (\mu_1 + \mu_2)]\, y' \\ &+ [\lambda_1 \lambda_2 e^{2sx} + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s)\, e^{sx} + \mu_1 \mu_2]\, y = 0. \end{aligned} \tag{102}$$

После поређења једначина (100) и (102), долази се до система једначина:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= A, \\ \mu_1 + \mu_2 &= b, \\ \mu_1 \mu_2 &= C, \\ \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s &= B. \end{aligned} \tag{103}$$

Параметри $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ дефинисани су једначинама

$$\begin{aligned} \lambda^2 - a\lambda + A &= 0, \\ \mu^2 - b\mu + C &= 0, \end{aligned} \tag{104}$$

које треба решити по λ и μ.

Тако нађени параметри

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$$

у функцији од

$$a, b, A, C$$

треба да задовољавају услов

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s = B, \tag{105}$$

а то је пета једначина система (103).

Скуп једначина (104) даје ова четири система решења:

12. У овој глави исцрпно смо изнели примену нашег поступка, који је у уводу (§ 4) само скициран, на истраживање критеријума[1]) интеграбилитета једначине

$$y'' + (ax + b)\, y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y = 0. \tag{99}$$

При томе смо констатовали:

1⁰ *да се тим поступком могу наћи нови критеријуми интеграбилитета;*

2⁰ *да су готово сви познати критеријуми интеграбилитета једначине* (99) *обухваћени, као партикуларни случајеви, ставовима* I – IV;

3⁰ *да је ефективна примена поступка веома једноставна и да је тај поступак подесан за конструисање једначина ради попуњавања* Kamke-*ове збирке диференцијалних једначина,*

Пут којим се дошло до резултата за једначину (99) биће углавном исти и када је реч о једначинама другог типа.

Глава друга

КРИТЕРИЈУМИ ИНТЕГРАБИЛИТЕТА ЈЕДНАЧИНЕ

$$y'' + (a\,e^{sx} + b)\, y' + (A\,e^{2sx} + B\,e^{sx} + C)\, y = 0.$$

13. Поставимо сада задатак да, применом нашег поступка нађемо критеријуме интеграбилитета диференцијалне једначине

$$y'' + (a\,e^{sx} + b)\, y' + (A\,e^{2sx} + B\,e^{sx} + C)\, y = 0, \tag{100}$$

---

[1]) Други критеријуми интеграбилитета једначине (10), осим оних наведених горе, могу се добити ако се пође, на пример, од једначине (28) у којој је

$$f(x) \equiv \prod_{\nu=1}^{\nu=s} (x - k_\nu),$$

$$g(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{\nu=s+2} \lambda_\nu x^{s-\nu+2},$$

$$h(x) \equiv \mu_1 x + \mu_2$$

и ако се параметри

$$s,\ k_\nu,\ \lambda_\nu,\ \mu_\nu$$

потчине извесним условима (које овде не износимо) на основу којих се полиноми

$$f' + g + fh, \quad g' + gh$$

(f, g, h имају горе дефинисане изразе) могу поделити полиномом f без остатка. Тада се има један веома генералан критеријум интеграбилитета једначине (10).

где су: s, a, b, A, B, C ма какве константе, уз ова ограничења:

1° $s \neq 0$;

2° a, A, B нису једновремено једнаки нули.

Систем линеарних једначина који се може довести у кореспонденцију са једначином (100) има облик

$$\begin{aligned} & y' + (\lambda_1 e^{sx} + \mu_1)\, y = z, \\ & z' + (\lambda_2 e^{sx} + \mu_2)\, z = 0, \end{aligned} \tag{101}$$

где су

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu_1,\ \mu_2$$

константе.

Елиминацијом z из система (101) налази се:

$$\begin{aligned} & y'' + [(\lambda_1 + \lambda_2)\, e^{sx} + (\mu_1 + \mu_2)]\, y' \\ & + [\lambda_1 \lambda_2 e^{2sx} + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s)\, e^{sx} + \mu_1 \mu_2]\, y = 0. \end{aligned} \tag{102}$$

После поређења једначина (100) и (102), долази се до система једначина:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 + \lambda_2 = a, \\ & \lambda_1 \lambda_2 = A, \\ & \mu_1 + \mu_2 = b, \\ & \mu_1 \mu_2 = C, \\ & \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s = B. \end{aligned} \tag{103}$$

Параметри λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 дефинисани су једначинама

$$\begin{aligned} & \lambda^2 - a\lambda + A = 0, \\ & \mu^2 - b\mu + C = 0, \end{aligned} \tag{104}$$

које треба решити по λ и μ.

Тако нађени параметри

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \mu_1,\ \mu_2$$

у функцији од

$$a,\ b,\ A,\ C$$

треба да задовољавају услов

$$\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1 s = B, \tag{105}$$

а то је пета једначина система (103).

Скуп једначина (104) даје ова четири система решења:

I. *систем:*

$$\lambda_1=\frac{a+R_1}{2},\quad \mu_1=\frac{b+R_2}{2},$$
$$\lambda_2=\frac{a-R_1}{2},\quad \mu_2=\frac{b-R_2}{2}; \tag{106}$$

II. *систем:*

$$\lambda_1=\frac{a+R_1}{2},\quad \mu_1=\frac{b-R_2}{2},$$
$$\lambda_2=\frac{a-R_1}{2},\quad \mu_2=\frac{b+R_2}{2}; \tag{107}$$

III. *систем:*

$$\lambda_1=\frac{a-R_1}{2},\quad \mu_1=\frac{b+R_2}{2},$$
$$\lambda_2=\frac{a+R_1}{2},\quad \mu_2=\frac{b-R_2}{2}; \tag{108}$$

IV. *систем:*

$$\lambda_1=\frac{a-R_1}{2},\quad \mu_1=\frac{b-R_2}{2},$$
$$\lambda_2=\frac{a+R_1}{2},\quad \mu_2=\frac{b+R_2}{2}, \tag{109}$$

где је

$$R_1=+\sqrt{a^2-4A},$$
$$R_2=+\sqrt{b^2-4C}. \tag{110}$$

Вредностима (106), (107), (108), (109) одговарају респективно ови услови које морају да задовољавају параметри што се јављају у једначини (100):

$$s(a+R_1)+ab-R_1R_2=2B, \tag{111}$$

$$s(a+R_1)+ab+R_1R_2=2B, \tag{112}$$

$$s(a-R_1)+ab+R_1R_2=2B, \tag{113}$$

$$s(a-R_1)+ab-R_1R_2=2B, \tag{114}$$

где су R_1 и R_2 дефинисани формулама (110).

Из претходног се види да су од шест коефицијената s, a, b, A, B, C пет произвољни.