

ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЛИНЕАРНОЈ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ
ДРУГОГ РЕДА КОЈА СЕ ПОЈАВЉУЈЕ У ЈЕДНОМ
ПРОБЛЕМУ МАТЕМАТИЧКЕ ФИЗИКЕ

1. Проблем којим се бавио професор Миланковић у расправи *Zur Theorie der Strahlenabsorption in der Atmosphäre*¹⁾ своди се, у крајњој анализи, на одређивање функције $\varepsilon(x)$ помоћу једне линеарне диференцијалне једначине другог реда којој одговара ова хомогена једначина:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3 \left(\frac{d}{dx} \log a \right) \frac{d\varepsilon}{dx} + \left[\frac{da}{dx} - a \frac{d}{dx} \log a + 2 \left(\frac{d}{dx} \log a \right)^2 - \frac{d^2}{dx^2} \log a \right] \varepsilon = 0. \quad (1)$$

У тој једначини a означава једну функцију од x којом се може располагати произвољно.

Професор Миланковић, на крају поменуте расправе, навео је један случај интеграбилитета једначине (1), наиме:

$$a(x) = k_1 e^{k_2 x},$$

где су k_1 и k_2 константе. У овом случају, општи интеграл једначине (1) дат је изразом

$$\varepsilon(x) = C_1 e^{k_2 x} + C_2 e^{2k_2 x}, \quad (2)$$

где C_1 и C_2 претстављају интеграционе константе.

2. Показаћемо да је могућно интегралити једначину (1) за ма какав облик функције $a(x)$.

1) *Annalen der Physik*, vierte Folge, Bd. 43, 1914, S. 623–638. Видети нарочито стр. 634.

Диференцијалној једначини (1) може се дати овај једноставнији облик:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3 \frac{a'}{a} \frac{d\varepsilon}{dx} + \left(3 \frac{a'^2}{a^2} - \frac{a''}{a} \right) \varepsilon = 0, \quad (3)$$

$$\left(a' = \frac{da}{dx}, \quad a'' = \frac{d^2a}{dx^2} \right).$$

Очевидно је да је функција

$$a(x)$$

једно партикуларно решење једначине (3).

Друго партикуларно решење једначине (3) дато је изразом:

$$a(x) \int a(x) dx.$$

Према томе, опште решење једначине (3) приказано је релацијом

$$\varepsilon(x) = C_1 a(x) + C_2 a(x) \int a(x) dx, \quad (4)$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

За случај када је

$$a(x) = k_1 e^{k_2 x},$$

добија се, према (4),

$$\varepsilon(x) = C_1 k_1 e^{k_2 x} + C_2 \frac{k_1^2}{k_2} e^{2k_2 x},$$

што је у складу са резултатом (2) проф. Миланковића.

3. У једначини (3) место функције $a(x)$ ставимо функцију $A(x)$ помоћу везе

$$a(x) = e^{A(x)}.$$

Једначина (3) добија тада облик

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3 A' \frac{d\varepsilon}{dx} + (2 A'^2 - A'') \varepsilon = 0. \quad (5)$$

Ако се овде стави

$$A = -\frac{1}{3} \int f(x) dx,$$

једначина (5) постаје

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} + f(x) \frac{d\varepsilon}{dx} + \left[\frac{2}{9} f^2(x) + \frac{1}{3} f'(x) \right] \varepsilon = 0. \quad (6)$$

Ова једначина јесте партикуларни случај једначине

$$\varepsilon'' + f\varepsilon' - [\lambda(\lambda + 1)f^2 + \lambda f']\varepsilon = 0 \quad (7)$$

$$[f = f(x), \lambda = \text{const.}]$$

коју је интеграліо Н. Görtler¹⁾.

Заиста, ако се у (7) стави

$$\lambda = -\frac{1}{3}$$

добија се управо једначина (6).

Görtler-ов резултат претставља партикуларни случај овог нашег става:

Диференцијална једначина

$$FHy'' + (F'H + FI + GH)y' + (G'H + GI)y = 0 \quad (8)$$

$$(F, G, H, I = \text{функције од } x)$$

може се свести на интегралан систем једначина

$$\begin{aligned} Fy' + Gy &= z, \\ Hz' + Iz &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Ако се у (8) стави

$$F \equiv 1, \quad G \equiv -\lambda f(x), \quad H \equiv 1, \quad I \equiv (\lambda + 1)f(x)$$

добиће се наведени Görtler-ов случај.

Математички институт
Универзитет у Скопљу

Фебруара 1949

¹⁾ *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, 1942, S. 233, Differentiagleichung (5).

Видети тако исто:

Е. Kamke, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. 1: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, dritte Auflage, Leipzig, 1944, S. 643, Differentialgleichung 2.76a.

Д. С. МИТРИНОВИЧ

О ЛИНЕЙНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ
ВТОРОГО ПОРЯДКА, КОТОРОЕ ПОЯВЛЯЕТСЯ В ОДНОМ
ВОПРОСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(Вывод)

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varepsilon}{dx^2} - 3 \left(\frac{d}{dx} \log a \right) \frac{d\varepsilon}{dx} + \left[\frac{da}{dx} - a \frac{d}{dx} \log a + 2 \left(\frac{d}{dx} \log a \right)^2 - \frac{d^2}{dx^2} \log a \right] \varepsilon = 0. \quad (1)$$

где a функция от x , появляется в одном вопросе, рассматриваемом Миланковичем.¹⁾

Миланкович указывает, что уравнение (1) интегрируемо в случае, если:

$$a(x) = k_1 e^{k_2 x} \\ (k_1, k_2 = \text{const}).$$

В настоящей статье показываем что уравнение (1) может быть интегрировано и в случае произвольной функции $a(x)$, так как $a(x)$ — сдно партикулярное решение уравнения (1), т. е.

$$\varepsilon_1(x) = a(x).$$

D. S. MITRINOVITCH

SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND
ORDRE INTERVENANT DANS UN PROBLÈME
DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

(Résumé)

1. L'équation différentielle (1)*, où a désigne une fonction de x dont on peut disposer arbitrairement, intervient dans un problème, considéré par Milankovitch²⁾.

1) *Annalen der Physik*, vierte Folge, Bd. 43, 1914, S. 623—638. Смотреть особенно стр. 634.

*) Les formules numérotées par chiffres arabes se rapportent au texte en langue serbe.

2) *Annalen der Physik*, vierte Folge, Bd. 43, 1914, S. 623—638. Cf. notamment page 634.

Milankovitch a indiqué un cas d'intégrabilité de l'équation (1), à savoir

$$a(x) = k_1 e^{k_2 x}$$

$$(k_1, k_2 = \text{const.}).$$

Dans cette Note nous montrons que l'équation (1), qui s'écrit plus simplement sous la forme (3), s'intègre pour une forme quelconque de la fonction $a(x)$.

En effet, l'équation (3) admet la fonction

$$\varepsilon_1 = a(x)$$

comme une solution particulière.

La solution générale de l'équation (3) est donnée par (4), où C_1 et C_2 désignent des constantes d'intégration.

2. Si l'on pose

$$a(x) = \exp\left(-\frac{1}{3} \int f(x) dx\right),$$

l'équation (3) prend la forme (6) et présente un cas particulier de l'équation (7), intégrée par H. Görtler¹⁾. Or, en posant

$$\lambda = -\frac{1}{3}$$

l'équation (7) est précisément l'équation (6).

Le résultat de Görtler en question présente un cas particulier de notre proposition suivante:

L'équation différentielle

$$FH y'' + (F'H + FI + GH) y' + (G'H + GI) y = 0$$

$$(F, G, H, I = \text{fonctions de } x)$$

est réductible au système intégrable

$$Fy' + Gy = z,$$

$$Hz' + Iz = 0.$$

Si l'on pose

$$F \equiv 1, \quad G = -\lambda f(x), \quad H \equiv 1, \quad I \equiv (\lambda + 1) f(x)$$

on retrouve le cas mentionné de Görtler.

1) *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 22, 1942, S. 233, Differentialgleichung (5).