ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О АЛГЕБАРСКИМ ИРАЦИОНАЛНИМ ЈЕДНАЧИНАМА

Глава прва

1. Посматрајмо једначину

$$F\left(z, \sqrt[p_1]{P_1}, \sqrt[p_2]{P_2}, \ldots, \sqrt[p_n]{P_n}\right) = 0, \tag{1}$$

где су:

1° p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ цели позитивни бројеви[1]);

2° P_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ полиноми по $z = x + iy$ чији су коефицијенти комплексни бројеви;

3° F полином по назначеним аргументима са комплексним коефицијентима.

Ако се стави

$$\sqrt[p_\nu]{P_\nu} = t_\nu \tag{2}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

једначина (1) постаје

$$F(z, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0. \tag{3}$$

Једначина (3) и једначине

$$P_\nu(z) = t_\nu^{p_\nu} \tag{4}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

чине заједно систем од $(n+1)$ једначина у којима се више не јавља ниједан израз под знаком корена.

---

[1]) Случај када су p_ν цели негативни бројеви или разломљени рационални бројеви (позитивни или негативни) своди се, очевидно, на случај који горе дискутујемо.

Елиминацијом параметра t_1 из једначина:

$$F(z, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0,$$

$$P_1(z) - t_1^{p_1} = 0,$$

по Sylvester-овој, Cauchy-евој или по којој другој методи[1]), добија се једначина

$$F_1(z, t_2, t_3, \ldots, t_n) = 0,$$

где је F_1 полином по назначеним аргументима[2]).

Ако се затим из једначина

$$F_1(z, t_2, t_3, \ldots, t_n) = 0,$$

$$P_2(z) - t_2^{p_2} = 0$$

елиминише t_2, долази се до нове једначине

$$F_2(z, t_3, t_4, \ldots, t_n) = 0,$$

где је F_2 полином по наведеним аргументима.

Продужујући тако са елиминацијом параметара

$$t_\nu \qquad (\nu = 3, 4, \ldots, n-1),$$

долази се до једначине

$$F_{n-1}(z, t_n) = 0,$$

тако да се, кад се из последње једначине и једначине

$$P_n(z) = t_n^{p_n}$$

елиминише параметар t_n, добија дефинитивно једначина

$$F_n(z) = 0, \tag{5}$$

где је F_n полином по z.

---

[1]) Видети на пример,

Б. Гавриловић, *Теорија детерминаната*, Београд, 1889, стр. 120–128;

А. К. Сушкевич, *Основы высшей алгебры*, четвертое издание, ОГИЗ, Москва—Ленинград, 1941, Глава VIII, стр. 206;

J. V. Uspensky, *Theory of Equations*, New York, McGraw-Hill, 1948, p. 277–291.

[2]) Пре него што се приступи примени једне од метода за елиминацију, могу се каткада остварити знатна упрошћавања подесним комбиновањем једначина у датом систему. Нека је. на пример, дата једначина

$$z^2\sqrt{z^2+z-1} + \sqrt[3]{z+2} + \sqrt{(z^2+z-1)^3}\sqrt[3]{z+2} = i + z,$$

где је $i = \sqrt{-1}$.

Једначину (5) зваћемо *трансформат примитивне* једначине (1).

Према поступку којим се дошло до једначине (5) очевидно је да она садржи решења свих једначина (1), *односно једначина* (5) *обухвата све различите једначине* (1), *до којих се долази када се за назначене корене узму у обзир сва њихова значења* (детерминације). Ако смо од свих ових једначина узели једну одређену, онда треба посебно испитати која су од решења једначине (5) истодобно и решења изабране примитивне једначине која је обухваћена једначином (1).

Пример I. Дата је једначина:

$$\sqrt[3]{z-1}+\sqrt[5]{z+2}=\sqrt[7]{z^2+1}.$$

Према горњем, пишемо систем:

$$t_1+t_2=t_3,$$
$$z-1=t_1^3,$$
$$z+2=t_2^5,$$
$$z^2+1=t_3^7.$$

Овде се, једна за другом, имају извршити три елиминације.

Пример II. Полазећи од једначине

$$\sqrt[3]{z+2}-\sqrt[6]{z^2-1}=\sqrt{z+2}$$

и стављајући

$$\sqrt[6]{z+2}=t_1,$$
$$\sqrt[6]{z^2-1}=t_2,$$

Одговарајући систем (2) гласи:

$$t_1z^2+t_2+t_1^3t_2=i+z,$$
$$z^2+z-1=t_1^2,$$
$$z+2=t_2^3.$$

Ако t_1^2 из друге једначине уврстимо у прву, добијамо

$$t_1[(z^2+z-1)t_2+z^2]+t_2=i+z.$$

Из последње једначине и једначине

$$z^2+z-1=t_1^2$$

лако се сада елиминише t_1. Остаје још да се иза тога елиминише t_2.

добија се систем:

$$t_1^2 - t_2 = t_1^3,$$
$$z + 2 = t_1^6,$$
$$z^2 - 1 = t_2^6.$$

Овде треба извршити две елиминације, ма да се у датој једначини јављају три корена. Уопште, број елиминација смањиће се увек када између полинома $P_\nu(z)$ постоји релација облика

$$P_\alpha = \lambda P_\beta$$

(α, β = цели позитивни бројеви $\leqslant n$; λ = ма каква константа).

2. Каткада је подесније да се формира најпре једначина по једном од параметара t_ν. Пођимо од система дефинисаног са (3) и (4) и елиминацијом образујмо једначину у којој ће од параметара

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

фигурисати само један параметар, рецимо t_ν. По себи се разуме, да ћемо се при избору параметра t_ν задржати на оном који је најподеснији са гледишта практичности. Дакле, ако се елиминише z и параметри:

$$t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}, t_{\nu+1}, \ldots, t_n,$$

добија се једначина

$$Q_\nu(t_\nu) = 0, \tag{6}$$

где је Q_ν полином по t_ν.

Будући да су z и t_ν везани релацијом

$$P_\nu(z) = t_\nu^{p_\nu}, \tag{7}$$

решавање једначине (1) своди се на решавање једначина (6) и (7).

Ако је потребно формирати једначину по z, остаје још да се из једначина (6) и (7) елиминише t_ν. У случају када је:

$$P_\nu(z) = Mz + N \qquad (M, N = \text{две комплексне константе})$$

имамо Tschirnhausen-ову трансформацију и тада се елиминација параметра t_ν може извршити, на пример, Hermite-овим поступком.

3. Посматрајмо опет једначину (1) и претпоставимо сада да коефицијенти полинома F и полинома P_ν (P_ν = функција реалне промењиве x) припадају области реалних бројева.

Тада се под

$$\sqrt[p_\nu]{P_\nu(x)} \qquad (P_\nu(x) > 0)$$

подразумева само позитивна вредност корена.

Да бисмо у овом случају решили једначину

$$F\left(x, \sqrt[p_1]{P_1}, \sqrt[p_2]{P_2}, \ldots, \sqrt[p_n]{P_n}\right) = 0, \tag{8}$$

треба претходно решити једначину (5) и испитати који од корена (решења) задовољава једначину (8) имајући у виду да корени $\sqrt[p_\nu]{P_\nu(x)}$ имају поменуто значење.

Узмимо, на пример, једначину

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x}, \qquad (x \geqslant 0). \tag{9}$$

Одговарајући систем гласи:

$$x = t_1^4,$$
$$x + 1 = t_2^3,$$
$$t_1 + t_2 = t_1^2.$$

Елиминацијом параметра t_2 из последње две једначине налази се:

$$(t_1^2 - t_1)^3 = x + 1,$$

или, у развијеном облику,

$$t_1^6 - 3t_1^5 + 3t_1^4 - t_1^3 - (x+1) = 0. \tag{10}$$

Ова једначина, с обзиром на једначину

$$x = t_1^4, \tag{11}$$

добија простији вид:

$$t_1^3 - x t_1^2 + 3x t_1 + (1 - 2x) = 0.$$

Елиминацијом t_1 из последње једначине и једначине (11) налази се

$$\begin{vmatrix} 1 & -x & 3x & 1-2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 3x & 1-2x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x & 3x & 1-2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -x & 3x & 1-2x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

Остаје још да се развије детерминанта која фигурише у последњој једначини, да се реши тако добијена једначина $D(x)=0$ и да се провери да ли међу њеним решењима $x_k \geqslant 0$ има таквих која задовољавају примитивну једначину (9).

Да бисмо решили једначину (9), можемо поступити и на овај начин.

Из (10) и (11) елиминацијом x, добија се

$$t_1^6 - 3t_1^5 + 2t_1^4 - t_1^3 - 1 = 0. \tag{12}$$

Решења једначине (9) налазе се међу вредностима

$$x = t_1^4 \quad (x \geqslant 0),$$

где место t_1 треба редом стављати корене једначине (12).

4. Нека је сада дата једначина

$$\sqrt{P_1 + \sqrt[3]{P_2}} + \sqrt[3]{P_3 - \sqrt[5]{P_4}} = z + \sqrt[5]{P_5 \sqrt[3]{P_6}} \tag{13}$$

$$(P_\nu = \text{полиноми по } z).$$

Ова једначина, очевидно, не спада у тип (1). Међутим, и овде може да се искористи наведени поступак за уклањање корена.

Ставимо најпре,

$$\begin{aligned} P_2 &= t_2^3, \\ P_4 &= t_4^5, \\ P_6 &= t_6^{15}. \end{aligned} \tag{14}$$

Једначина (13) добија облик

$$\sqrt{P_1 + t_2} + \sqrt[3]{P_3 - t_4} = z + t_6 \sqrt[5]{P_5}. \tag{15}$$

Ставимо затим:

$$\begin{aligned} P_1 + t_2 &= t_1^2, \\ P_3 - t_4 &= t_3^3, \\ P_5 &= t_5^5. \end{aligned} \tag{16}$$

Једначина (15) односно (13) тада постаје

$$t_1 + t_3 = z + t_5 t_6. \tag{17}$$

Ако се из релација (14), (16), (17) елиминишу параметри t_ν, добија се једначина

$$F_6(z) = 0,$$

где је F_6 полином по z.

Уопште, *свака једначина*

$$A\left(z, \sqrt[p_1]{P_1}, \sqrt[p_2]{P_2}, \ldots, \sqrt[p_n]{P_n}\right) = 0, \tag{18}$$

где је A алгебарска функција назначених аргумената, може се трансформовати, применом наведеног поступка, у једначину која неће садржавати z под кореном.

5. Наведени поступак може се генералисати без тешкоћа на релације са две и више промењивих. Ради једноставности, задржаћемо се само на случају две промењиве. Нека је дата релација:

$$F\left(z_1, z_2, \sqrt[p_1]{P_1}, \sqrt[p_2]{P_2}, \ldots, \sqrt[p_n]{P_n}\right) = 0, \tag{19}$$

где су P_ν полиноми по

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

и где су остале ознаке протумачене у вези са једначином (1).

Ставимо

$$\begin{gathered} P_\nu(z_1, z_2) = t_\nu^{p_\nu} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{20}$$

Једначина (19) тада добија облик

$$F(z_1, z_2, t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0. \tag{21}$$

Избацивањем параметара t_ν из једначина (20) и (21), добија се

$$F_n(z_1 \text{ и } z_2) = 0,$$

где је F_n полином по z_1 и z_2.

На сличан начин бисмо поступили, ако бисмо пошли од једначине облика (18) где је место

$$P_\nu(z) \text{ стављено } P_\nu(z_1, z_2).$$

Глава друга

6. У овој расправи хтели смо само да дамо неколике примедбе о трансформацији и решавању алгебарских ирационалних једначина, а на то нас је навео овај разлог.

П. Димић скренуо нам је пажњу на то да питање о редуковању једначина облика (1) на облик

$$F(z) = 0,$$

где је $F(z)$ полином по z, није довољно обрађено у литератури. Том приликом сетили смо се чланка који је Gino Loria објавио баш по истом питању[1]).

У томе чланку Loria се задржава на ирационалним једначинама специјалног облика, где се појављују само квадратни корени. Уосталом Loria и почиње овако:

Dans presque tous les traités d'algèbre élémentaire, je trouve prescrit que „pour rendre rationnelle une équation algébrique qui ne l'est pas, on doit la rendre rationnelle à l'aide d'une ou de plusieurs élévations à des puissances convenables".

Све једначине које наводи Loria улазе у тип (8), као партикуларни случајеви. Loria даје поступак који ћемо овако формулисати:

Да би се решила једна алгебарска ирационална једначина

$$f(z) = 0 \tag{22}$$

а да се при томе не узме у помоћ потенцирање, треба образовати *норму* функције $f(z)$:

$$N(z) = f_1(z) \cdot f_2(z), \ldots, f_s(z),$$

где је s број различитих израза што са добијају из функције $f(z)$ када коренима, који се у овој функцији јављају, припишемо све могуће детерминације (значења); ако међу функцијама

$$f_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

постоје такве две $f_\lambda(z)$ и $f_\mu(z)$ да је

$$f_\mu(z) = -f_\lambda(z),$$

тада се једна од њих не узима у обзир и број s се смањује за јединицу.

Норма $N(z)$ је рационална функција по z и нека су њене нуле

$$z_1, z_2, \ldots, z_q \tag{23}$$

$$(q = \text{један природни број}).$$

---

[1]) G. Loria, *Remarques sur les équations algébriques non rationnelles* (*Mathesis*, t. 52, 1938, p. 129—131).

De Comberousse за уклањање корена из релација препоручује метод елиминације, али је то питање само дотакао.

Видети о томе:

De Comberousse, *Cours de mathématiques*, t. IV (Algèbre supérieure, seconde partie), cinquième édition, Paris, Gauthier—Villars, 1923, p. 560—561.

Једначина

$$N(z)=0$$

обухвата сва решења дате једначине (22), као и све нуле функција

$$f_1, f_2, \ldots, f_s$$

од којих је једна и сама полазна функција $f(z)$.

За свако од решења (23) треба испитати да ли је истовремено и решење једначине (22).

Пример. Loria је свој поступак применио на једначину:

$$\sqrt{x-4}-\frac{3}{\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-1}=0 \qquad (24)$$

и за функцију $f(x)$:

$$f(x)=\sqrt{x-4}-\frac{3}{\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-1}$$

образовао *норму*[1])

$$N(x)=9-\frac{9}{x-4}.$$

Стављајући

$$N(x)=0$$

добија се $x=5$, и то није решење једначине (24). Та једначина претставља пример алгебарске једначине без корена[2]). Тој чињеници даје Loria и геометриску интерпретацију.

---

[1]) Другом приликом о норми ове функције учинићемо једну примедбу. Иначе, приметимо да је наше формулисање резултата прецизније него код Loria.

[2]) Loria у истом чланку примећује да најстарије дело у коме је наведен пример алгебарске једначине без корена припада J. S. Young-у. То је: *Theory and solution of algebraical equations.* II издање тог дела објављено је 1843. На стр. 43 Young цитира једначину

$$(2x-5)+\sqrt{x^2-7}=0$$

као пример алгебарске једначине без корена. Ако се, према Loria, образује $N(z)$, добија се:

$$3x^2-20x+32=0.$$

Међутим, обадва корена те једначине задовољавају једначину

$$(2x-5)-\sqrt{x^2-7}=0.$$

7. У предавањима Ј. Карамате[1]), у вези са уклањањем корена из једначина, стоји:

„У колико су изрази сложенији и број корена већи, на пример, ако се у некој једначини од најмање три члана[2]) налазе дi а n-та корена ($n \geqslant 3$), тада се елементарним путем (бе примене комплексних бројева) ових корена не можемо ос..бодити".

Напред је показано да постоји и други поступак осим оног који горе предлаже у предавањима Ј. Карамата. У ствари поступак из предавања Ј. Карамате као и онај о коме говори G. Loria јесу у основи једно исто.

Вредно је компаративно проучити поступак који смо напред употребили и овај на који су само упутили G. Loria и Ј. Карамата.

8. *Пример.* Узмимо једначину:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt{z+1} + 1. \tag{25}$$

Први поступак (елементаран).

После дизања на куб, има се

$$z = (z+4)\sqrt{z+1} + 3z + 4,$$

тј.

$$-2z - 4 = (z-4)\sqrt{z+1}.$$

Подизањем на квадрат налази се

$$z^3 + 5z^3 + 8z = 0.$$

Други поступак (Loria—Карамата).

Пођимо од функције

$$f(z) = \sqrt[3]{z} - \sqrt{z+1} - 1,$$

[1]) Ј. Карамата, *Алгебра* I, први део, Београд, Научна књига, 1949, стр. 15.

[2]) Овде се мисли, ваљда, на пример на овакве једначине:

$$\sqrt[3]{x-7} - x = \sqrt[5]{x^2+1},$$

$$\sqrt[5]{x} + x^2 - x = \sqrt[7]{x^2-1}$$

или можда само на овакве:

$$\sqrt[5]{x-7} + \sqrt[5]{x^2+1} = x^2 + x - 1.$$

и образујмо

$$f_1(z) = \sqrt[3]{z} + \sqrt{z+1} - 1,$$

$$f_2(z) = \varepsilon \sqrt[3]{z} - \sqrt{z+1} - 1,$$

$$f_3(z) = \varepsilon \sqrt[3]{z} + \sqrt{z+1} - 1,$$

$$f_4(z) = \varepsilon^2 \sqrt[3]{z} - \sqrt{z+1} - 1,$$

$$f_5(z) = \varepsilon^2 \sqrt[3]{z} + \sqrt{z+1} - 1,$$

где је

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Норма функције $f(z)$ је овде:

$$N(z) = f \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5 .$$

После множења и свођења, водећи при томе рачуна да је

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0,$$

добија се

$$N(z) = z^3 + 5z^2 + 8z .$$

Резултат је сагласан са оним који је горе добијен, но примена овог поступка скопчана је са елементарним, али заметним израчунавањима.

Трећи поступак (метод елиминације).

Ставимо

$$\sqrt[3]{z} = t_1,$$

$$\sqrt{z+1} = t_2;$$

тада имамо систем

$$z = t_1^3, \tag{26}$$

$$z + 1 = t_2^2, \tag{27}$$

$$t_1 = t_2 + 1 . \tag{28}$$

Елиминацијом t_2 добија се

$$z + 1 = (t_1 - 1)^2,$$

тј.

$$z = t_1^2 - 2t_1 . \tag{29}$$

Из јелначина (26) и (29) треба елиминисати још t_1. Једначина (26) може се написати и овако:

$$z = t_1^3,$$

$$z = t_1^2 \cdot t_1,$$

па је на основу (29)

$$z = (z + 2t_1)\,t_1. \tag{30}$$

Ако се сада из (29) и (30) елиминише t_1, добија се:

$$z^3 + 5z^2 + 8z = 0. \tag{31}$$

До решења једначине (25) може се и овако доћи. Ако се из једначина

$$z = t_1^2 - 2t_1,$$

$$z = t_1^3$$

елиминише z, има се

$$t_1^3 - t_1^2 + 2t_1 = 0,$$

одакле се налазе корени

$$0, \quad \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

С обзиром на

$$z = t_1^3$$

решења за z јесу:

$$0, \quad \frac{-5 \mp i\sqrt{7}}{2}, \tag{32}$$

а то су решења једначине

$$z^3 + 5z^2 + 8z = 0.$$

Остаје још да се испита да ли су наведена решења (32) заиста решења једначине (25).

Последњи поступак изгледа најподеснији. Први се може употребити само у врло изузетним партикуларним случајевима, док је последњи (трећи) поступак употребљив у свима случајевима.

9. Од интереса је дубље проучити односе између примитивне једначине (1) и њеног трансформата (5); исто тако односе између примитивне једначине (18) и њеног трансформата.

Тако, на пример, од интереса је да се одреди степен[1]) трансформата у зависности од

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

и степена

$$q_1, q_2, \ldots, q_n$$

респективних полинома

$$P_1, P_2, \ldots, P_n.$$

Исто тако, вредно би било навести карактеристичне случајеве, осим већ споменутих, у којима се број елиминација смањује. Ако би се могао упростити наведени алгоритам којим се долази до трансформата примитивне једначине, то би такође претстављало известан интерес.

Ми се овде нећемо бавити горе наведеним питањима. На њих само упућујемо читаоца.

Глава трећа[2])

10. У овој глави изложићемо, детаљније и потпуније, резултате наведене у § 4 ове расправе[3]). Уведимо најпре неке ознаке.

Слова:

$$\begin{gathered} \alpha, \beta, \ldots, \lambda; \\ a_1, a_2, \ldots, a_\alpha; \\ b_1, b_2, \ldots, b_\beta; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1, l_2, \ldots, l_\lambda \end{gathered}$$

означавају целе позитивне бројеве.

---

[1]) Ј. Улчар прочитао је ову расправу у рукопису и приметио је следеће:

Постављени проблем да се нађе степен трансформата једначине (1) вероватно није лак, јер је решење тог проблема и за $\nu=1$ [видети једначину (1)] прилично компликовано. За тај најједноставнији случај решење је садржано у два Minding-ова правила која је исцрпно изнео Е. Netto у својој алгебри: *Vorlesungen über Algebra* (Teubner, Leipzig), Bd. 2, 1900, S. 49—60 (§§ 369—375).

[2]) Ова глава додана је накнадно, што се уосталом види и из композиције саме расправе.

[3]) Ј. Карамата и М. Томић прочитали су, пре штампања, ову расправу, на чему им је писац захвалан. Под сугестијом Карамате редигована је трећа глава.

Ознаке:

$$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha;$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_\beta;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_1, L_2, \ldots, L_\lambda$$

претстављају елементарне[1]) алгебарске функције комплексне променљиве z, са произвољним комплексним коефицијентима.

Ознаке

$$R(M_1, M_2, \ldots)$$
$$R_\nu^{(\mu)}(M_1, M_2, \ldots)$$
$$(\mu = a, b, \ldots, l; \quad \nu = \text{цео позитиван број})$$

претстављају рационалне функције назначених аргумената у комплексном подручју.

11. Посматрајмо алгебарску једначину

$$A(z) = 0 \tag{33}$$

у којој $A(z)$ има облик[2])

$$A(z) = R\left(z, \sqrt[a_1]{A_1}, \sqrt[a_2]{A_2}, \ldots, \sqrt[a_\alpha]{A_\alpha}\right) \tag{34}$$

где су функције $A_\nu(z)$ дефинисане изразима:

$$A_\nu = R_\nu^{(a)}\left(z, \sqrt[b_1]{B_1}, \sqrt[b_2]{B_2}, \ldots, \sqrt[b_\beta]{B_\beta}\right) \tag{35}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Функције

$$B_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \beta)$$

које се јављају у формулама (35) дефинисане су изразима:

$$B_\nu = R_\nu^{(b)}\left(z, \sqrt[c_1]{C_1}, \sqrt[c_2]{C_2}, \ldots, \sqrt[c_\gamma]{C_\gamma}\right) \tag{36}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta).$$

---

1) Под елементарном алгебарском функцијом подразумева се израз образован операцијама сабирања, одузимања, множења, дељења и степеновања рационалним бројем које су извршене, у коначном броју, са променљивом z.

2) Увођењем појма *реда* алгебарске ирационалне функције, унеколико би се другојаче формулисале чињенице дате у овој расправи. О томе појму видети, на пример, М. Тихомандрицкий, *Краткій курсъ высшей алгебры*, Харков, 1887, стр. 3–5.

Функције

$$C_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \gamma)$$

које се јављају у формулама (36) дефинисане су, на аналогичан начин, помоћу функција

$$D_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \delta).$$

Продужујући тако, претпоставимо да се најзад долази до алгебарских функција

$$K_\nu = R_\nu^{(k)}\left(z, \sqrt[l_1]{L_1}, \sqrt[l_2]{L_2}, \ldots, \sqrt[l_\lambda]{L_\lambda}\right) \tag{37}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

где су

$$L_\nu = R_\nu^{(l)}(z) \tag{38}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

рационалне функције промењљиве z.

Уведимо параметре $t_{\nu a}$ помоћу формула

$$A_\nu = t_{\nu a}^{a_\nu} \tag{39}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Тада једначина (33) постаје:

$$R(z, t_{1a}, t_{2a}, \ldots, t_{\alpha a}) = 0. \tag{40}$$

Ставимо даље

$$B_\nu = t_{\nu b}^{b_\nu} \tag{41}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Релације (35), према (41), добијају облик:

$$A_\nu = R_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}). \tag{42}$$

Ако се доведу у везу релације (39) и (42), долази се до нових релација:

$$R_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) = t_{\nu a}^{a_\nu} \tag{43}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha).$$

Уведимо сада нове параметре $t_{\nu c}$ помоћу веза

$$C_\nu = t_{\nu c}^{c_\nu} \tag{44}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \gamma).$$

Тада релације (36), на основу (44) и (41), доводе до ових релација:

$$R_\nu^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) = t_{\nu b}^{b_\nu} \tag{45}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \beta).$$

Даљом применом наведеног поступка долази се најзад до релација

$$K_\nu = R_\nu^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) \tag{46}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa);$$

$$L_\nu \equiv R_\nu^{(l)}(z) = t_{\nu l}^{l_\nu} \tag{47}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

12. Наведеним поступком формиране су ове једначине:

$$\begin{gathered} R(z, t_{1a}, t_{2a}, \ldots, t_{\alpha a}) = 0; \\ R_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) = t_{\nu a}^{a_\nu} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, \alpha); \\ R_\nu^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) = t_{\nu b}^{b_\nu} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, \beta); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_\nu^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) = t_{\nu k}^{k_\nu} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa); \\ R_\nu^{(l)}(z) = t_{\nu l}^{l_\nu} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, \lambda). \end{gathered} \tag{48}$$

Систем (48) састоји се из N једначина, где је

$$N = 1 + \alpha + \beta + \cdots + \lambda.$$

У систему (48) појављују се параметри t_{pq} којих има на броју

$$N - 1.$$

Пошто су

$$R \text{ и } R_\nu^{(\mu)}$$

рационалне функције, можемо ставити

$$R = \frac{P}{Q}, \quad R_\nu^{(\mu)} = \frac{P_\nu^{(\mu)}}{Q_\nu^{(\mu)}},$$

где су

$$P,\ Q;\ P_{\nu}^{(\mu)},\ Q_{\nu}^{(\mu)}$$

полиноми по аргументима који ће ниже бити назначени.

Систем (48) тада добија облик:

$$
\begin{aligned}
& P(z, t_{1a}, t_{2a}, \ldots, t_{\alpha a}) = 0; \\
& P_{\nu}^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) - t_{\nu a}^{a_\nu} Q_{\nu}^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) = 0 \\
& \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \alpha); \\
& P_{\nu}^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) - t_{\nu b}^{b_\nu} Q_{\nu}^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) = 0 \\
& \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \beta); \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (49) \\
& P_{\nu}^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) - t_{\nu k}^{k_\nu} Q_{\nu}^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) = 0 \\
& \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa); \\
& P_{\nu}^{(l)}(z) - t_{\nu l}^{l_\nu} Q_{\nu}^{(l)}(z) = 0 \\
& \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \lambda).
\end{aligned}
$$

13. Став. 1⁰ *Свака алгебарска једначина* (33) *може се свести на облик*

$$T(z) = 0 \tag{50}$$

где је $T(z)$ *полином по* z.

2⁰ *То свођење може увек да се изврши по принципу елиминације: из* N *једначина* (49) *треба елиминисати* $(N-1)$ *параметара* t_{pq}.

14. Изложени алгоритам за формирање трансформата (50) алгебарске једначине (33) може се, у великом броју случајева, знатно упростити.

Проблематика на коју је указано у § 9 ове расправе постаје још интересантнија, када се узму у обзир резултати из ове последње главе.

Математички институт
Универзитета у Скопљу

Априла 1949

Д. С. МИТРИНОВИЧ

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

(*Вывод*)

Рассмотрим функцию $A(z)$, $z=x+iy$, определенную следующим способом

$$A(z)=R\left(z, \sqrt[a_1]{A_1}, \sqrt[a_2]{A_2}, \ldots, \sqrt[a_\alpha]{A_\alpha}\right),$$

где:

1⁰ R является рациональной функцией цитированных аргументов;

(I) 2⁰ $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ – целые положительные числа;

3⁰ A_ν $(\nu=1, 2, \ldots, \alpha)$ являются функциями от z, следующей формы:

$$A_\nu = R_\nu^{(a)}\left(z, \sqrt[b_1]{B_1}, \sqrt[b_2]{B_2}, \ldots, \sqrt[b_\beta]{B_\beta}\right).$$

Обозначения в последней формуле сходны предшествующим обозначениям (I).

Предполагаем, наконец, что

$$K_\nu = R_\nu^{(k)}\left(z, \sqrt[l_1]{L_1}, \sqrt[l_2]{L_2}, \ldots, \sqrt[l_\lambda]{L_\lambda}\right)$$

$$(\nu=1, 2 \ldots, \varkappa),$$

где

$$L_\nu = R_\nu^{(l)}(z)$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, \lambda)$$

т. е. $R_\nu^{(l)}(z)$ являются рациональными функциями от z.

Если введем параметры t_{pq} при помощи формул:

$$A_\nu = t_{\nu a}^{a_\nu}$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, \alpha);$$

$$B_\nu = t_{\nu b}^{b_\nu}$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, \beta);$$

. . . .

$$L_\nu = t_{\nu l}^{l_\nu}$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, \lambda)$$

приходим к следующему заключению:

Каждое алгебраическое уравнение

$$A(z)=0,$$

в котором функция $A(z)$ определена выше указанным способом, может быть преобразовано в уравнение

$$P(z)=0,$$

где $P(z)$ полином по z.

Это преобразование всегда исполнимо элиминацией параметров t_{pq}, введенных показанным способом.

D. S. MITRINOVITCH

SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES NON RATIONNELLES[1])

(*Résumé*)

Notations.

1⁰
$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda;$$
$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha;$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_\beta;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_1, l_2, \ldots, l_\lambda$$

désignent des entiers positifs;

2⁰
$$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha;$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_\beta;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_1, L_2, \ldots, L_\lambda$$

sont des fonctions algébriques élémentaires de la variable complexe

$$z=x+iy,$$

c'est-à dire des fonctions de z qui se forment en effectuant sur z des opérations algébriques élémentaires, en nombre limité;

3⁰
$$R(M_1, M_2, \ldots M_s),$$
$$R_\nu^{(\mu)}(M_1, M_2, \ldots, M_s)$$

avec

$$\mu=a, b, \ldots, l$$
$$(\nu, s=\text{entiers positifs}),$$

---

1) C'est un résumé de l'étude *O algebarskim iracionalnim jednačinama*, écrite en langue serbe (voir pages précédentes de cet Annuaire).

sont des fonctions rationnelles des arguments

$$M_1, M_2, \ldots, M_s.$$

I. Les notations indiquées étant adoptées, considérons l'équation algébrique

$$A(z)=0, \tag{1}$$

où la fonction $A(z)$ est de la forme

$$A(z)=R\left(z, \sqrt[a_1]{A_1}, \sqrt[a_2]{A_2}, \ldots, \sqrt[a_\alpha]{A_\alpha}\right), \tag{2}$$

les fonctions $A_\nu(z)$ étant définies par les expressions

$$A_\nu(z)=R_\nu^{(a)}\left(z, \sqrt[b_1]{B_1}, \sqrt[b_2]{B_2}, \ldots, \sqrt[b_\beta]{B_\beta}\right) \tag{3}$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, \alpha).$$

Les fonctions

$$B_\nu(z) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, \beta)$$

intervenant dans les formules (3) sont définies par

$$B_\nu=R_\nu^{(b)}\left(z, \sqrt[c_1]{C_1}, \sqrt[c_2]{C_2}, \ldots, \sqrt[c_\gamma]{C_\gamma}\right) \tag{4}$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, \beta).$$

Les fonctions

$$C_1(z), \quad C_2(z), \ldots, C_\gamma(z),$$

qui interviennent dans les formules (4), d'une manière analogue, sont exprimées à l'aide des fonctions

$$D_\nu(z) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, \delta).$$

En poursuivant ainsi, on arrive, par supposition, à

$$K_\nu=R_\nu^{(k)}\left(z, \sqrt[l_1]{L_1}, \sqrt[l_2]{L_2}, \ldots, \sqrt[l_\lambda]{L_\lambda}\right), \tag{5}$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, \varkappa),$$

où

$$L_\nu=R_\nu^{(l)}(z) \tag{6}$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, \lambda),$$

$R_\nu^{(l)}$ étant des fonctions rationnelles de la variable z

Introduisons les paramètres $t_{\nu a}$ à l'aide des formules

$$A_\nu=t_{\nu a}^{a_\nu} \tag{7}$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, \alpha).$$

L'équation (1) devient alors

$$R\,(z,\ t_{1a}\,,\ t_{2a}\,,\ldots,\ t_{\alpha a})=0. \tag{8}$$

En posant ensuite

$$B_\nu = t_{\nu b}^{b_\nu} \tag{9}$$

$$(\nu=1,\ 2,\ldots,\ \beta),$$

les relations (3), d'après (9), prennent la forme suivante

$$A_\nu = R_\nu^{(a)}(z,\ t_{1b}\,,\ t_{2b}\,,\ldots,\ t_{\beta b}). \tag{10}$$

Si l'on met en correspondance les relations (7) et (10), on obtient

$$R_\nu^{(a)}(z,\ t_{1b},\ t_{2b},\ldots,\ t_{\beta b}) = t_{\nu a}^{a_\nu} \tag{11}$$

$$(\nu=1,\ 2,\ldots,\ \alpha).$$

Introduisons les nouveaux paramètres $t_{\nu c}$ par les formules

$$C_\nu = t_{\nu c}^{c_\nu} \tag{12}$$

$$(\nu=1,\ 2,\ldots,\ \gamma).$$

Les relations (4), d'après (9) et (12), conduisent à

$$R_\nu^{(b)}(z,\ t_{1c},\ t_{2c},\ldots,\ t_{\gamma c}) = t_{\nu b}^{b_\nu} \tag{13}$$

$$(\nu=1,\ 2,\ldots,\ \beta).$$

Par application du même procédé, on arrive enfin à

$$K_\nu = R_\nu^{(k)}(z,\ t_{1l},\ t_{2l},\ldots,\ t_{\lambda l}) \tag{14}$$

$$(\nu=1,\ 2,\ldots,\ \varkappa);$$

$$L_\nu \equiv R_\nu^{(l)}(z) = t_{\nu l}^{l_\nu} \tag{15}$$

$$(\nu=1,\ 2,\ldots,\ \lambda).$$

Les relations (8), (11), (13), ..., (15) forment un système de N équations, avec

$$N = 1+\alpha+\beta+\cdots+\lambda.$$

Dans ces N relations figurent les paramètres t_{pq} dont le nombre est $(N-1)$.

Puisque R et $R_\nu^{(\mu)}$ sont des fonctions rationnelles, on peut poser

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{P}{Q}, \\ R_\nu^{(\mu)} &= \frac{P_\nu^{(\mu)}}{Q_\nu^{(\mu)}}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

où P, Q, $P_\nu^{(\mu)}$, $Q_\nu^{(\mu)}$ désignent des polynômes en arguments qui seront iudiqués plus bas.

D'après (16), le système de N équations, mentionné plus haut, prend la forme suivante:

$$
\begin{gathered}
P(z, t_{1a}, t_{2a}, \ldots, t_{\alpha a}) = 0; \\
P_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) - t_{\nu a}^{a_\nu} Q_\nu^{(a)}(z, t_{1b}, t_{2b}, \ldots, t_{\beta b}) = 0 \\
(\nu = 1, 2, \ldots, \alpha); \\
P_\nu^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) - t_{\nu b}^{b_\nu} Q_\nu^{(b)}(z, t_{1c}, t_{2c}, \ldots, t_{\gamma c}) = 0 \\
(\nu = 1, 2, \ldots, \beta); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (17) \\
P_\nu^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) - t_{\nu k}^{k_\nu} Q_\nu^{(k)}(z, t_{1l}, t_{2l}, \ldots, t_{\lambda l}) = 0 \\
(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa); \\
P_\nu^{(l)}(z) - t_{\nu l}^{l_\nu} Q_\nu^{(l)}(z) = 0 \\
(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda).
\end{gathered}
$$

Les faits précédents donnent la possibilité d'énoncer la:

Proposition. *Toute équation algébrique* (1) *peut être transformée en l'équation*

$$T(z) = 0,$$

où $T(z)$ *est un polynôme en* z.

Cette réduction peut être toujours réalisée par l'élimination des $(N-1)$ *paramètres* t_{pq} *entre les* N *relations* (17).

II. Notre étude, écrite en langue serbe, contient aussi, en dehors des résultats précités, de nombreuses remarques relatives à des équations du type (1) dans le cas où la fonction $A(z)$ a une forme moins générale que celle considérée dans ce résumé. Ainsi, par exemple, nous avons étudié particulièrement l'équation

$$F\left(z, \sqrt[p_1]{P_1}, \sqrt[p_2]{P_2}, \ldots, \sqrt[p_n]{P_n}\right) = 0,$$

où:

1º F désigne un polynôme en arguments indiqués;

2º $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des entiers positifs;

3º $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont des polynômes en variable complexe

$$z = x + iy,$$

les coefficients de ces polynômes étant des nombres complexes.

III. Sans difficulté, on peut étendre le procédé employé à un système des m équations algébriques en

$$z_1, z_2, \ldots, z_s,$$

où

$$z_k = x_k + iy_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, s),$$

ces équations algébriques étant du type (1).

À la fin, il faut noter le fait que dans la littérature mathématique nous n'avons pas rencontré le problème sur la transformation des équations algébriques non rationnelles traité dans toute sa généralité comme nous l'avons fait ici, et c'est seulement grâce à cette circonstance que nosu publions ces remarques sur le problème en question.