ДРАГОСЛАВ С. МИТРИНОВИЋ

О ЈЕДНОЈ ДЕТЕРМИНАНТИ Escherich-ОВА ТИПА

Нека су:

1^0 a и b два произвољна броја;

2^0 n један цео позитиван број.

Посматрајмо правоугаону матрицу[1] $(n, n+1)$ и означимо је са M:

$$M = \left\| \begin{array}{ccccccc} n & 1 & & & & & \\ & n-1 & 2 & & & 0 & \\ & & n-2 & 3 & & & \\ & & & n-3 & 4 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & & 2 & n-1 \\ & & & & & 1 & n \end{array} \right\| \qquad (1)$$

У матрици M на двема нацртаним паралелним правим линијама налазе се редом природни бројеви који су поређани у два супротна смисла.

[1] Та матрица састоји се од n врста и $(n+1)$ колона.

Полазећи од матрице M формирајмо другу матрицу N на тај начин што ћемо матрици M дописати као *прву* врсту ове бројеве

$$a^n, \ -a^{n-1}b, \ a^{n-2}b^2, \ldots\ldots, (-1)^{n-1}ab^{n-1}, \ (-1)^n b^n. \tag{2}$$

Експоненти потенција чија је основа a јесу:

$$n, \ n-1, \ n-2, \ldots, 1.$$

Исто тако забележимо експоненте потенција чија је основа b:

$$1, \ 2, \ 3, \ldots, n.$$

Квадратна матрица N чија је прва врста (2) има ове особине:

1° Експоненти потенција чија је основа b налазе се на кореспондентним местима на главној дијагонали матрице N;

2° Експоненти потенција чија је основа a налазе се на кореспондентним местима на дијагонали која је суседна главној дијагонали матрице N;

3° Вредност детерминанте матрице N везана је са изразом

$$(a+b)^n$$

релацијом

$$|N| = n!\,(a+b)^n.$$

Последња особина може се доказати ако се пође од Escherich-ова резултата:

Детерминанта E реда $(n+1)$:

$$E = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & -y_n & x_n \end{vmatrix} \tag{3}$$

има вредност[1]*):*

---

[1]) Видети на пример,
E. Pascal, *I Determinanti,* seconda edizione, Hoepli, Milano, 1923, p. 215.

$$
\begin{aligned}
E = {} & a_0 x_1 x_2 \ldots\ldots x_n \\
& + a_1 y_1 x_2 \ldots\ldots x_n \\
& + a_2 y_1 y_2 x_3 \ldots\ldots x_n \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + a_n y_1 y_2 y_3 \ldots\ldots y_n .
\end{aligned} \tag{4}
$$

Наша детерминанта $|N|$ спада очевидно у класу детерминаната E.

У изразу (4) којим је дефинисана детерминанта (E) члан $(k+1)$-ви гласи:

$$
a_k y_1 y_2 \ldots y_k x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_n
$$
$$
(k < n).
$$

Одговарајући члан у развитку детерминанте $|N|$ има облик:

$$
(-1)^k a^{n-k} b^k (-n)(-n+1)\ldots(-n+k-1)(k+1)\ldots(n-1)n,
$$

$\therefore$

$$
(-1)^k a^{n-k} b^k (-1)^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1)\ldots(n-1)n,
$$

$\therefore$

$$
a^{n-k} b^k n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1)\ldots(n-1)n.
$$

Посматрајмо сада вредност израза

$$
\frac{1}{n!} n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1)\ldots(n-1)n.
$$

Последњи израз, ако се напише у облику

$$
\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1)\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k(k+1)\ldots n},
$$

доводи до

$$
\binom{n}{k},
$$

што је и требало показати.

На детерминанту $|N|$ наишли смо проучавајући једно питање из теорије обичних линеарних диференцијалних једначина.

Математички институт.
Универзитет у Скопљу

Октобар 1949

Д. С. МИТРИНОВИЧ

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ТИПА Escherich

(Вывод)

Рассматривается определитель данный в тексте на французком языке.

Показатели степеней, имеющих за основу b, находятся респективно на главной диагонали этого определителя. Показатели степеней, имеющих за основу a, находятся на линии параллелной с главной диагональю.

Простым вычислением показывается что значение этого определителя, принадлежащего типу Escherich,[1]) дано формулой

$$n!\,(a+b)^n.$$

D. S. MITRINOVITCH

SUR UN DÉTERMINANT DU TYPE D'Escherich

(Résumé)

On considère le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} a^n & -a^{n-1}b & a^{n-2}b^2 & a^{n-3}b^3 & \ldots & (-1)^{n-1}ab^{n-1} & (-1)^n b^n \\ n & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & n \end{vmatrix}$$

Les exposants des puissances ayant la base b se trouvent respectivement sur la diagonale principale de ce déterminant. Les exposants des puissances ayant la base a se trouvent respectivement sur la ligne parallèle à la diagonale principale.

Un calcul simple montre que la valeur de ce déterminant, rentrant dans le type d'Escherich[1]), est donnée par la formule

$$n!\,(a+b)^n.$$

1) См. на пример,
E. Pascal, *I Determinanti*, seconda edizione, Hoepli, Milano, 1923, p. 215.