En prenant pour V le développement

$$V = V_q + V_{q+1}\Gamma + \ldots + V_{q+h}\Gamma^{q+h} + \ldots, \tag{4}$$

ce second cas secondaire peut se déduire du point de vue formel du premier cas secondaire dans lequel $U = 0$ et $V_0 = V_1 = \ldots = V_{q-1} = 0$.

De cette remarque, on tire, si $h > m$,

$$V_{q+h} = \frac{-U_0}{4^p s^{p+h-1}} \int_0^s \ldots \int_0^s \frac{s^{h-1}}{U_0} \sum_{i=1}^{p} \frac{\Phi^i_{p,\,q+h-i} V_{q+h-i}}{(q+h)(q+h-1)\ldots(q+h-i+1)} ds \ldots ds \tag{5}$$

et, si $0 \leqq h < m$, on obtient d'abord pour $V_q (h = 0)$ la même expression que nous avons trouvée pour U_0 dans le cas impair et pour $0 < h < m$

$$\begin{aligned} V_{q+h} = {} & \frac{-U_0}{4^p (q+h)!\, s^{p+h-1}} \int_0^s \ldots \int_0^s \frac{s^{h-1}}{U_0} \sum_{i=1}^{q+h} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{q+h-i} C^{q+h-i}_{p-i-1} \\ & \times (q+h-i+j)!\, \Psi^{i,j}_{p,2(q+h-i+j)} V_{q+h-i+j}\, ds \ldots ds, \end{aligned} \tag{6}$$

avec la convention de prendre $V_0 = V_1 = \ldots = V_{q-1} = 0$ dans (5) et (6).

Comme dans le premier cas secondaire, on démontre que (4) converge uniformément et que pour obtenir la solution élémentaire cherchée on doit ajouter à l'expression trouvée une certaine fonction w largement indéterminée, la fonction de correction correspondante à ce second cas secondaire.

Dans le cas pair, la solution élémentaire obtenue n'est pas par conséquent bien déterminée. Sur $\Gamma = 0$, elle possède une *singularité algébrico-logarithmique*, si $n > 2p$ et est *régulière* ou a une *singularité logarithmique*, si $n \leqq 2p$.

Nos résultats sont évidemment valables pour tout opérateur F non parabolique. Si $p = 1$, on retrouve la solution élémentaire de M. Hadamard et si $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, $h^\alpha = 0$, $k = 0$, on retombe sur les fonctions polyharmoniques élémentaires.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une équation différentielle linéaire du second ordre transformable en elle-même.* Note de M. **Dragoslav S. Mitrinovitch**, présentée par M. Henri Villat.

1. L'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - f(x) z = 0, \tag{1}$$

par le changement de fonction et de variable indépendante

$$z = v\sqrt{\varphi'(t)}, \qquad x = \varphi(t),$$

devient [1]

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \left[\frac{3}{4}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\varphi'''}{\varphi'} + \varphi'^2 f(\varphi)\right] v = 0,$$

où $\varphi(t) \neq$ const.

[1] Dans cette Note les accents marquent des dérivées.

Sous la condition

$$f[\varphi(t)] = \frac{1}{\varphi'^2} f(t) + \frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4}, \tag{2}$$

l'équation (1) se transforme en elle-même.

La fonction $f(t)$ la plus générale vérifiant l'équation fonctionnelle (2) est

$$f(t) = \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{B''}{B'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}$$

avec $\alpha = \text{const.}$, $B = B(t) =$ fonction de Kœnigs, $\varphi(t)$ satisfaisant à diverses hypothèses que nous ne reproduisons pas ici.

Le résultat plus haut indiqué est fourni par P. Appell [2], après une analyse très profonde et basée sur des recherches de Kœnigs concernant les équations fonctionnelles.

2. En partant de nos résultats antérieurs [3] et en suivant une voie assez simple, nous avons obtenu la proposition suivante [4] :

I. *L'équation de Riccati*

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}, \tag{3}$$

avec

$$\theta = \theta(x) \neq \text{const.}; \qquad \alpha = \text{const.} \neq 0$$

se transforme en elle-même par le changement de fonction

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 \frac{1}{y_1 + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta'}{\theta}},$$

où y_1 est une nouvelle fonction inconnue.

L'équation (3) a comme solutions particulières

$$y_k = -\frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} + \omega_k\frac{\theta'}{\theta} \qquad (k = 1, 2),$$

ω_k étant les racines de l'équation en ω,

$$\omega^2 - \omega - \alpha = 0.$$

II. *L'équation linéaire*

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \left[\alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'}\right]z = 0$$

---

[2] *Acta mathematica*, 15, 1891, p. 288-302.

[3] D. S. Mitrinovitch, *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 156-157; *Bulletin de l'Académie serbe des sciences*, 6, 1939, p. 121-156.

[4] On peut directement vérifier la proposition énoncée ici.

se transforme aussi en elle-même par le changement de fonction

$$z = \frac{1}{\sqrt{\theta'}} \exp\left(\alpha \int \frac{\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 dx}{\frac{z'_1}{z_1} + \frac{1}{2}\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta'}{\theta}} \right),$$

en désignant par z_1 la nouvelle fonction inconnue et par z'_1 sa dérivée.

III. *L'équation de Riccati* (3) *est transformable en elle-même par une infinité de substitutions de fonction ayant la forme*

$$y = P_k(x) + \frac{Q_k(x)}{R_k(x) + y_k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

où P_k, Q_k, R_k sont des combinaisons rationnelles de θ, θ', θ'', lesquelles se forment d'après un procédé simple.

Une conclusion analogue s'énonce relativement à l'équation linéaire correspondante.

3. En comparant le coefficient d'Appell

$$f_A(x) = \alpha\left(\frac{B'}{B}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{B''}{B'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'},$$

($B = B(x) =$ fonction de Kœnigs), avec le nôtre

$$f_M(x) = \alpha\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\theta'''}{\theta'},$$

on voit que ces deux coefficients ont la même structure : dans le coefficient $f_M(x)$, au lieu de la fonction de Kœnigs, il intervient une fonction $\theta(x)$ complètement arbitraire.

Notre résultat est caractérisé encore par le fait que la variable indépendante n'est pas altérée, tandis que chez Appell on fait sur l'équation différentielle non seulement un changement de fonction, mais aussi de variable indépendante.