О ТРАНСФОРМАЦИЈИ ЈЕДНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

од

ДРАГОСЛАВА С. МИТРИНОВИЋА

I.

1. Предмет овог рада је диференцијална једначина првог реда

$$\left(\frac{dy}{dx}+a_1y+a_2\right)^p\left(\frac{dy}{dx}+b_1y+b_2\right)^q=f(x), \tag{1}$$

где су p и q цели бројеви који испуњавају ове услове:

$$pq\neq 0, \quad p+q\neq 0. \tag{2}$$

Коефицијенти a_1, a_2, b_1, b_2 су ма какве функције променљиве x уз ограничење

$$a_1\neq b_1. \tag{3}$$

Претпоставимо још

$$f(x)\neq 0. \tag{4}$$

Ако нису испуњени услови (3) и (4), диференцијална једначина (1) се може свести на линеарну диференцијалну једначину.

Исти је случај, ако је

$$p+q=0.$$

Ако је

$$p=0 \quad \text{или} \quad q=0,$$

једначина (1) се такође своди на линеарну једначину.

У случају када је истовремено

$$p=0, \quad q=0,$$

једначина (1) престаје да буде диференцијална једначина.

2. Ако је

$$p = kq, \qquad (k = \text{цео број}),$$

једначина (1) може да се упрости кореновањем, пре него што се приступи трансформацији једначине (1) која се има у виду у овој расправи.

Нека су:

1^0 m_1 и m_2 цели бројеви, позитивни или негативни;

2^0 n_1 и n_2 цели позитивни бројеви.

У таквом се случају проучавање диференцијалне једначине

$$\left(\frac{dy}{dx} + a_1 y + a_2\right)^{\frac{m_1}{n_1}} \left(\frac{dy}{dx} + b_1 y + b_2\right)^{\frac{m_2}{n_2}} = f(x) \tag{5}$$

може свести на проучавање једначине облика (1).

Заиста, ако се изрази који се налазе на левој и десној страни једначине (5) степенују са $n_1 n_2$, долази се до једначине облика (1).

II.

3. Пођимо од диференцијалне једначине (1) и ставимо у њој

$$\frac{dy}{dx} + a_1 y + a_2 = \lambda^q, \tag{6}$$

где је

$$\lambda = \lambda(x), \qquad \lambda \neq 0.$$

Диференцијална једначина (1) тада постаје

$$\lambda^{pq} \left(\frac{dy}{dx} + b_1 y + b_2\right)^q = f(x),$$

тј.

$$\lambda^p \left(\frac{dy}{dx} + b_1 y + b_2\right) = c(x), \tag{7}$$

где је функција $c(x)$ дефинисана помоћу релације

$$[c(x)]^q = f(x). \tag{8}$$

Посматрајмо сад једначине (6) и (7), тј. систем

$$\frac{dy}{dx} + a_1 y + a_2 = \lambda^q,$$

$$\frac{dy}{dx} + b_1 y + b_2 = \frac{c}{\lambda^p}.$$

Решењем овог система линеарних једначина по $\frac{dy}{dx}$ и y, добија се:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_1}{b_1 - a_1}\lambda^q - \frac{a_1 c}{b_1 - a_1}\frac{1}{\lambda^p} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 - a_1}, \tag{9}$$

$$y = -\frac{1}{b_1 - a_1}\lambda^q + \frac{c}{b_1 - a_1}\frac{1}{\lambda^p} + \frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1}. \tag{10}$$

Из последње две релације може се извести закључак:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{b_1 - a_1}\lambda^q + \frac{c}{b_1 - a_1}\frac{1}{\lambda^p} + \frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1}\right)$$

$$= \frac{b_1}{b_1 - a_1}\lambda^q - \frac{a_1 c}{b_1 - a_1}\frac{1}{\lambda^p} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 - a_1}.$$

Ако се у последњој релацији изврше назначене операције и потребна сређивања, долази се до алгебарске диференцијалне једначине облика

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\alpha_0 \lambda^{p+q+1} + \alpha_1 \lambda^{p+1} + \alpha_2 \lambda}{\beta_0 \lambda^{p+q} + \beta_1}. \tag{11}$$

Коефицијенти

$$\alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \beta_0, \ \beta_1$$

јесу функције промењиве x. Они су дефинисани изразима:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\left(\frac{1}{b_1 - a_1}\right)' - \frac{b_1}{b_1 - a_1}, \\ \alpha_1 &= \left(\frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1}\right)' - \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 - a_1}, \\ \alpha_2 &= \left(\frac{c}{b_1 - a_1}\right)' + \frac{a_1 c}{b_1 - a_1}, \\ \beta_0 &= \frac{q}{b_1 - a_1}, \\ \beta_1 &= \frac{cp}{b_1 - a_1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ознака

$$(\varphi)',$$

где је $\varphi = \varphi(x)$, има значење:

$$(\varphi)' = \frac{d\varphi}{dx}.$$

Диференцијална једначина (11) спада у тип једначина

$$(13)\qquad \frac{d\lambda}{dx}=\frac{A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+A_2\lambda^{m-2}+\cdots+A_{m-1}\lambda+A_m}{B_0\lambda^n+B_1\lambda^{n-1}+B_2\lambda^{n-2}+\cdots+B_{n-1}\lambda+B_n},$$

где је:

$$A_k=A_k(x),\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$
$$B_i=B_i(x),\qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

и где су m и n цели позитивни бројеви.

Једначина (13) је Appell-ова диференцијална једначина.[1]

4. Диференцијална једначина (1) је *првог* реда, а степена:

1° $p+q$, ако је $p>0$, $q>0$;

2° $|p|+|q|$, ако је $p<0$, $q<0$;

3° $max(|p|, q)$, ако је $p<0$, $q>0$;

4° $max(p, |q|)$, ако је $p>0$, $q<0$.

Тако, на пример, једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}+a_1y+a_2\right)^{-3}\left(\frac{dy}{dx}+b_1y+b_2\right)^{-2}=f(x)$$

јесте степена

$$|p|+|q|=3+2=5.$$

Једначина

$$\left(\frac{dy}{dx}+a_1y+a_2\right)^{-3}\left(\frac{dy}{dx}+b_1y+b_2\right)^{2}=f(x)$$

есте степена

$$max(|p|, q)=max(3, 2)=3.$$

Укратко речено, степен једначине (1) је:

$$(14)\qquad 1^0\qquad h=|p|+|q|,$$

ако p и q имају исте знаке;

---

[1] О проблему интеграције Appell-ове једначине видети:

1° P. Appell, *Sur les invariants de quelques équations différentielles (Journal de Mathématiques pures et appliquées*, quatrième série, t. 5, 1889, p. 361—423);

2° Д. Митриновић, *Прилог интеграљењу извесне класе алгебарских диференцијалних једначина I реда (Глас Српске академије наука*, књ. 165, 1935, стр. 165—170);

3° H. Lemke *Ueber eine Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung (Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 180, 1939, S. 141—188).

(15) 2^0 $$h = max(|p|, |q|),$$

ако p и q имају различите знаке.

Диференцијална једначина (11) *је алгебарска диференцијална једначина првог реда и првог степена.*

Облик (11) је нарочито подесан ако је:

(16) $$p+q>0, \quad p+1 \geqslant 0.$$

Тако, на пример, када је

$$p=-1, \quad q=2,$$

једначина (11) добија облик

(17) $$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_0\lambda^2+\alpha_2\lambda+\alpha_1}{\beta_0\lambda+\beta_1},$$

а то је Abel-ова диференцијална једначина.[1]

У случају када је

$$p=2, \quad q=-1,$$

диференцијална једначина (11) постаје[2]

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_1\lambda^3+\alpha_0\lambda^2+\alpha_2\lambda}{\beta_0\lambda+\beta_1}.$$

Ако нису испуњени услови (16), тада разломку

(18) $$\frac{\alpha_0\lambda^{p+q+1}+\alpha_1\lambda^{p+1}+\alpha_2\lambda}{\beta_0\lambda^{p+q}+\beta_1}$$

треба дати такав облик, да и бројитељ и именитељ тога разломка буде један полином (цела рационална функција) по λ.

Тако, на пример, ако су:

$$p<0, \quad q<0,$$

диференцијалној једначини (11) треба дати овај облик

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_2\lambda^{-p-q+1}+\alpha_1\lambda^{-q+1}+\alpha_0\lambda}{\beta_1\lambda^{-p-q}+\beta_0}.$$

У случају ако је

$$p+1<0, \quad q \geqslant 1,$$

[1] *Oeuvres complètes de* Niels Henrik Abel, nouvelle édition, publiée par L. Sylow et S. Lie, t. II, 1881, p. 26—35.

[2] О интеграцији ове једначине видети:

E. Haentzschel, *Ueber die Form des Integrals der Differentialgleichung* $\frac{dy}{dx}=\frac{p_0+p_1y+p_2y^2+p_3y^3}{q_0+q_1y}$ (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 112, 1893, S. 148—155).

једначини (11) треба дати нов облик:

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_0\,\lambda^q+\alpha_2\,\lambda^{-p}+\alpha_1}{\beta_0\,\lambda^{q-1}+\beta_1\,\lambda^{-p-1}};$$

тада је степен полинома

$$\alpha_0\,\lambda^q+\alpha_2\,\lambda^{-p}+\alpha_1$$

једнак

$$\max(q,-p);$$

степен полинома

$$\beta_0\,\lambda^{q-1}+\beta_1\,\lambda^{-p-1}$$

јесте

$$\max(q-1,-p-1).$$

Тако, на пример, једначини (1), за случај када је:

$$p=-2, \quad q=3$$

одговара једначина (11) облика

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_0\,\lambda^3+\alpha_2\,\lambda^2+\alpha_1}{\beta_0\,\lambda^2+\beta_1\,\lambda}.$$

И у осталим случајевима лако је подесити да $\frac{d\lambda}{dx}$, тј. израз (18), буде једнак количнику два полинома по λ.

Диференцијалну једначину (11) зваћемо *резолвентом* једначине (1).

5. Према изложеном може се формулисати овај:

Став. *Ако се на непознатој функцији y изврши рационална трансформација*

$$y=-\frac{1}{b_1-a_1}\lambda^q+\frac{c}{b_1-a_1}\frac{1}{\lambda^p}+\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1},$$

алгебарска диференцијална једначина првог реда

$$\left(\frac{dy}{dx}+a_1\,y+a_2\right)^p\left(\frac{dy}{dx}+b_1\,y+b_2\right)^q=f(x),$$

чији је степен

$$h=|p|+|q|, \quad \text{ако је } pq>0;$$
$$h=\max(|p|,|q|), \quad \text{ако је } pq<0,$$

своди се на алгебарску диференцијалну једначину првог реда и првог степена

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_0\,\lambda^{p+q+1}+\alpha_1\,\lambda^{p+1}+\alpha_2\,\lambda}{\beta_0\,\lambda^{p+q}+\beta_1},$$

где су $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ *функције од* x, *дефинисане формулама* (12).

Укратко речено, алгебарска диференцијална једначина првог реда (1), чији је степен $h \geqslant 2$ има за резолвенту алгебарску диференцијалну једначину првог реда и *првог степена*.

III.

6. Поставимо сада обрнути проблем који се састоји у овоме:

Дата је резолвента (11); *одредити одговарајућу диференцијалну једначину* (1), тј. коефицијенте

$$a_1, b_1, a_2, b_2, c$$

изразити као функцију коефицијената

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1.$$

Да бисмо решили овај проблем, пођимо од резолвенте (11), написане у облику

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{A_0 \lambda^{p+q+1} + A_1 \lambda^{p+1} + A_2 \lambda}{B\lambda^{p+q} + 1}, \tag{19}$$

где је:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\alpha_0}{\beta_1}, \\ A_1 &= \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \\ A_2 &= \frac{\alpha_2}{\beta_1}, \\ B &= \frac{\beta_0}{\beta_1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Дељење са β_1 овде је било допуштено, јер је

$$\beta_1 = \frac{cp}{b_1 - a_1},$$

а према претпоставци, напред уведеној,

$$c \neq 0, \quad p \neq 0, \quad a_1 \neq b_1.$$

Систем једначина (20), према формулама (12), постаје:

$$\frac{b_1 - a_1}{cp}\left[-\left(\frac{1}{b_1 - a_1}\right)' - \frac{b_1}{b_1 - a_1}\right] = A_0, \tag{21}$$

$$\frac{b_1-a_1}{cp}\left[\left(\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1}\right)'-\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1-a_1}\right]=A_1, \tag{22}$$

$$\frac{b_1-a_1}{cp}\left[\left(\frac{c}{b_1-a_1}\right)'+\frac{a_1c}{b_1-a_1}\right]=A_2, \tag{23}$$

$$\frac{q}{cp}=B. \tag{24}$$

Из једначине (24) непосредно излази

$$c=\frac{q}{Bp}, \tag{25}$$

ако се претпостави да је

$$B(x)\neq 0.$$

Када се у једначини (21) изврши назначено диференцирање, добија се

$$\frac{(b_1-a_1)'}{b_1-a_1}\cdot\frac{1}{cp}-\frac{b_1}{cp}=A_0. \tag{26}$$

Релација (23), када се у њој изврше једноставне трансформације, добија облик

$$-\frac{(b_1-a_1)'}{b_1-a_1}\cdot\frac{1}{cp}+\frac{c'}{c^2p}+\frac{a_1}{cp}=\frac{A_2}{c}. \tag{27}$$

Комбиновањем једначина (26) и (27) долази се до нове једначине

$$\frac{c'}{c^2p}-\frac{b_1-a_1}{cp}=A_0+\frac{A_2}{c},$$

одакле следује

$$b_1-a_1=\frac{c'}{c}-A_0cp-A_2p. \tag{28}$$

Коефицијент c је одређен формулом (25) у функцији датих вредности p, q, B, па је и разлика

$$b_1-a_1,$$

као што следује из формуле (28), такође дефинисана као функција вредности које су, према задатом проблему, познате.

Ради краткоће у писању уведимо ознаку

$$\tau=b_1-a_1=\frac{c'}{c}-A_0cp-A_2p\ , \tag{29}$$

тј., према (25),

(30) $$\tau = -\frac{B'}{B} - q\frac{A_0}{B} - A_2 p$$

и претпоставимо да је

$$\tau \neq 0 .$$

Из једначине (26), водећи рачуна о формулама (25) и (30), излази:

(31) $$b_1 = \frac{\tau'}{\tau} - q\frac{A_0}{B} .$$

Из једначине (27), када се узму у обзир формуле (25) и (30), следује:

(32) $$a_1 = A_2 p + \frac{\tau'}{\tau} + \frac{B'}{B} .$$

До сада смо изразили $c(x)$, $a_1(x)$, $b_1(x)$ у функцији коефицијената A_0, A_1, A_2, B. Остаје још да нађемо $a_2(x)$ и $b_2(x)$ у функцији наведених коефицијената.

Коефицијенти a_2 и b_2 појављују се само у једначини (22), која се може трансформисати на облик

$$(a_2 - b_2)' - \frac{(b_1 - a_1)'}{b_1 - a_1}(a_2 - b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) = A_1 c p .$$

Последња једначина, с обзиром на формуле (25) и (30), постаје

(33) $$\frac{da_2}{dx} - \left(\frac{\tau'}{\tau} - b_1\right) a_2 - \left(b_2' - \frac{\tau'}{\tau} b_2 + a_1 b_2 + q\frac{A_1}{B}\right) = 0 .$$

За одређивање коефицијената a_2 и b_2 имамо само једну једначину, тј. (33). Према томе, један од тих коефицијената, на пример b_2, може бити произвољна функција од x, док ће други коефицијенат, тј. a_2, бити дефинисан линеарном диференцијалном једначином првог реда

(34) $$\frac{da_2}{dx} = \varphi_1(x) a_2 + \varphi_2(x),$$

где је, према (33),

$$\varphi_1(x) = \frac{\tau'}{\tau} - b_1 ,$$

$$\varphi_2(x) = b_2' - \frac{\tau'}{\tau} b_2 + a_1 b_2 + q\frac{A_1}{B} .$$

Последње две формуле, према (31) и (32), постају

$$\varphi_1(x) = q\frac{A_0}{B},$$

$$\varphi_2(x) = b_2' + \frac{B'}{B} b_2 + p\, A_2 b_2 + q\frac{A_1}{B}.$$

7. Нека је сад резолвента диференцијалне једначине (1) дата у облику

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{A_0\lambda^m + A_1\lambda^n + A_2\lambda}{B\lambda^{m-1}+1}, \tag{35}$$

где су m и n цели бројеви, позитивни или негативни.

Ако се упореде једначине (19) и (35), добија се

$$p = n - 1,$$

$$q = m - n.$$

Претпоставићемо да $n \neq 1$. Ако је $n = 1$, имамо $p = 0$, тј. случај који смо напред искључили из наших посматрања.

Исто тако, претпоставићемо да је $m \neq n$. Ако је $m = n$, то значи да је $q = 0$, што смо такође искључили из наших посматрања.

Најзад, претпоставићемо да је $m \neq 1$, јер релација $m = 1$ повлачи за собом

$$p + q = 0$$

што је у противности са напред уведеном претпоставком (видети § 1).

8. Према резултатима добијеним у §§ 6 и 7 може се формулисати овај:

Став. *За сваку диференцијалну једначину* (35), *у којој су унапред дате вредности*

$$m,\ n,\ A_0(x),\ A_1(x),\ A_2(x),\ B(x)$$

$$(m \neq 1,\ n \neq 1,\ m \neq n,\ B \neq 0)$$

може се формирати одговарајућа једначина (1), *у којој су*

$$p,\quad q,\quad a_1(x),\quad b_1(x),\quad c(x)$$

дефинисани помоћу формула:

$$p = n - 1,$$

$$q = m - n,$$

$$a_1 = (n-1)A_2 + \frac{\tau'}{\tau} + \frac{B'}{B},$$

$$b_1 = \frac{\tau'}{\tau} - (m-n)\frac{A_0}{B},$$

$$c = \frac{m-n}{n-1}\cdot\frac{1}{B};$$

коефицијенат $a_2(x)$ *је решење линеарне једначине*

$$\frac{da_2}{dx} = (m-n)\frac{A_0}{B}a_2 + b_2' + \frac{B'}{B}b_2 + (n-1)A_2 b_2 + (m-n)\frac{A_1}{B},$$

где је $b_2(x)$ *произвољна функција променљиве* (x).

Функција[1] $\tau(x) \neq 0$ *дефинисана је изразом*

$$\tau(x) = -\frac{B'}{B} - (m-n)\frac{A_0}{B} - (n-1)A_2.$$

9. Према последњем ставу, једној унапред датој диференцијалној једначини облика (35) одговара једна *класа* једначина облика (1) са једном произвољном функцијом (a_2 или b_2). Резолвента се, стога, може сматрати као један *редуковани* облик једначине (1).

Диференцијалне једначине облика (35) биле су предмет истраживања са разних гледишта. Два става, изведена у овој расправи, који дају кореспонденцију између једначина (1) и (35) и обрнуто, могу бити узети као полазна тачка за истраживања како квантитативне тако и квалитативне природе. Тако, на пример, може се непосредно формулисати овај:

Став. *Сваки случај интеграбилитета једне диференцијалне једначине облика* (35) *даје једну класу интеграбилних диференцијалних једначина облика* (1), *где фигурише једна произвољна функција*

10. Ваља приметити да је G. Halphen[2], полазећи са геометриског гледишта, указао на могућност редукције извесних диференцијелних једначина првог реда на облик у коме ће линеарно фигурисати извод непознате функције.

Посматрана једначина (1) у овој расправи припада класи Halphen-ових једначина.

---

[1] Ову нову претпоставку: $\tau(x) \neq 0$ треба додати већ уведеним претпоставкама за коефицијенте m, n, B.

[2] G. Halphen, *Sur la réduction de certaines équations différentielles du premier ordre à la forme linéaire, par rapport à la dérivée de la fonction inconnue* [*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 87, 1878 (II), p. 741].

IV.

11. Важни су случајеви:

$$1^0 \quad p=1, \quad q=1;$$

$$2^0 \quad p=-1, \quad q=2;$$

$$3^0 \quad p=2, \quad q=-1.$$

Тада једначина (1) има респективно ове облике:

$$\left(\frac{dy}{dx}+a_1 y+a_2\right)\left(\frac{dy}{dx}+b_1 y+b_2\right)=f(x), \tag{36}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}+b_1 y+b_2\right)^2=f(x)\left(\frac{dy}{dx}+a_1 y+a_2\right), \tag{37}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}+a_1 y+a_2\right)^2=f(x)\left(\frac{dy}{dx}+b_1 y+b_2\right). \tag{38}$$

Ако се у овим једначинама изврше назначене операције, долази се до диференцијалне једначине првог реда, другог степена

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\,By\frac{dy}{dx}+Cy^2+2D\frac{dy}{dx}+2Ey+F=0, \tag{39}$$

где су коефицијенти A, B, C, D, E, F функције коефицијената a_1, a_2, b_1, b_2, f, тј. функције независно промењиве x.

У једном ранијем раду[1] смо показали: да се диференцијалне једначине (36), (37) и (38) могу редуковати на облик (39); и обрнуто да се са облика (39) може прећи на један од облика (36), (37), (38), према томе да ли је

$$\Delta=B^2-AC\neq 0$$

или је $\Delta=0$.

Исто тако, у истом раду показали смо да се са диференцијалних једначина облика

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_0(x)\lambda^3+\alpha_1(x)\lambda^2+\alpha_2(x)\lambda}{\beta_0(x)\lambda^2+\beta_1(x)},$$

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_0(x)\lambda^2+\alpha_1(x)\lambda+\alpha_2(x)}{\beta_0(x)\lambda+\beta_1(x)} \tag{40}$$

може прећи на једначину (39) и обрнуто.

---

[1] D. Mitrinovitch, *Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre* (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. 5, 1936, p. 10—22).

Овај случај смо раније навели и на њему се овде нећемо даље задржавати.

Диференцијална једначина (39) игра важну улогу у разним проблемима[1] диференцијалне геометрије и стога горе наведени резултати имају известан интерес.

Приметимо да је наш цитирани резултат о једначини (39) ушао у Kamke-ово дело[2] о диференцијалним једначинама.

15 децембар 1947.
Математички институт
Државног универзитета у Скопљу

---

[1] Видети, на пример,

1° Д. Митриновић, *О једној класи диференцијалних једначина првога реда на које се наилази у разним проблемима геометрије* (*Глас Српске академије наука*, књига 181, 1939, стр. 133—168). Résumé en français dans le *Bulletin de l'Académie serbe des sciences*, t. 6, 1939, p. 99–120);

2° D. Mitrinovitch, *Sur l'équation différentielle des lignes asymptotiques* (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade* t. 3, 1934, p. 175—178);

3° D. Mitrinovitch, *Sur les lignes de courbure des surfaces réglées à plan directeur* (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. 5, 1936, p. 100—102).

[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 1942, S. 373.

Резюме

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

от

Д. С. Митриновича

1.— Предметом этой записки является алгебраическое дифференциальное уравнение первого порядка (1)[1], где p и q обозначают два произвольных числа, под условием что бы было

$$pq \neq 0, \qquad p+q \neq 0.$$

Коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2, f являются функциями от x и т такими что

$$a_1 \not\equiv b_1 \qquad f(x) \not\equiv 0.$$

Степень уравнения (1) будет

$$h = |p| + |q|$$

если p и q одного знака;

$$h = \max (|p|, \ |q|)$$

если p и q противоположного знака.

2. – Если ставим

$$\frac{dy}{dx} + a_1 y + a_2 = \lambda^q \qquad (\lambda \neq 0),$$

уравнение (1) становится равносильным системе

$$\frac{dy}{dx} + a_1 y + a_2 = \lambda^q ,$$

$$\frac{dy}{dx} + b_1 y + b_2 = \frac{c}{\lambda^p} ,$$

в которой функция $c(x)$ определяется отношением

$$c^q = f(x).$$

Последняя система приводит к уравнениям (9) и (10). Обозначая что (9) является производной выражения (10), получаем для λ дифференциальное уравнение (11), в котором коэффициенты α_0, α_1, α_2, β_0, β_1 (функции от x) определены формулой (12)

Степень уравнения (11) равна единице, между тем как степень уравнения (1) $h \geqslant 2$.

3.— Из всего изложенного можем высказать сдедующее предложение:

Совершая на неизвестной функции y рациональное переобразование

$$y = -\frac{1}{b_1 - a_1} \lambda^q + \frac{c}{b_1 - a_1} \frac{1}{\lambda^p} + \frac{a_2 - b_2}{b_1 - a_1},$$

[1] См. сербский текст впереди.

дифференциальное уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_0\lambda^{p+q+1}+\alpha_1\lambda^{p+1}+\alpha_2\lambda}{\beta_0\lambda^{p+q}+\beta_1},$$

коэффициенты которого являются функциями от p, q, a_1, a_2, b_1, b_2, c (см. формулы 12).

4.— Каждое уравнение (1) коэффициенты которого подчиняются выше высказанным условиям, согласно изложенному поступку, приводится к форме (11).

Предложим теперь обратную задачу:

Если дано уравнение (резолвента)

$$\text{(R)}\qquad \frac{d\lambda}{dx}=\frac{A_0(x)\lambda^m+A_1(x)\lambda^n+A_2(x)\lambda}{B(x)\lambda^{m-1}+1}$$

(m и n представляют два целых числа, таких что $m\neq 1$, $n\neq 1$, $m\neq n$; $B\not\equiv 0$), определить начальное уравнение, соответствующее уравнению (1).

Эта задача разрешается следующим предложением:

Каждому дифференциальному уравнению первого порядка и первой степени вида (R) соответствует одно уравнение первого порядка и степени h вида (1) в котором p, q, a_1, b_1, c определяются формулами[1]:

$$p=n-1,$$

$$q=m-n,$$

$$a_1=(n-1)A_2+(\log\tau)'+(\log B)',$$

$$b_1=(\log\tau)'-(m-n)\frac{A_0}{B},$$

$$c=\frac{m-n}{n-1}\frac{1}{B},$$

$$\tau=-(\log B)'-(m-n)\frac{A_0}{B}-(n-1)A_2;$$

коефициент a_2 является решением линеарного уравнения

$$\frac{da_2}{dx}-(m-n)\frac{A_0}{B}a_2-\left[b_2'+b_2(\log B)'+(n-1)A_2b_2+(m-n)\frac{A_1}{B}\right]=0;$$

коэффициент b_2 является произвольной функцией.

Предположим что $\tau\not\equiv 0$.

Учитывая последнее предложение, получаем что одному уравнению вида (R) соответстует всегда одно уравнение вида (1), в котором появляется одна произвольная функция.

Воспользовавшись этим, можем, на пример высказать следующее предложение:

Каждое уравнение (R) которое возможно интегрировать, приводит к одному разряду интегрирующихся дифференциальных уравнений формы (1), с одной произвольной функцией.

---

[1] $(\log\omega)'=\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dx}$, $\omega=\omega(x)$.

5.— Партикулярные случаи уравнения (1) для:

$$1^0 \quad p=1, \quad q=1;$$

$$2^0 \quad p=-1, q=2;$$

$$3^0 \quad p=2, \quad q=-1$$

были уже исследованы нами[1] и вкратце изложены в новом сочинении[2] Kamke-a, посвящённом дифференциальным уравнениям.

Résumé

TRANSFORMATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

par

D. S. MITRINOVITCH

1. L'objet de cette Note est l'équation différentielle algébrique du premier ordre (1),* où p et q désignent deux entiers quelconques sous la condition que

$$p \neq 0, \qquad p+q \neq 0.$$

Les coefficients

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ f$$

de l'équation (1) sont des fonctions de x, telles que

$$a_1 \not\equiv b_1, \qquad f(x) \not\equiv 0.$$

Le degré de l'équation (1) est:

$$1^0 \qquad h=|p|+|q|,$$

si p et q ont les mêmes signes:

$$2^0 \qquad h=\max(|p|,\ |q|)$$

si p et q ont des signes différents.

2. Si l'on pose

$$\frac{dy}{dx}+a_1y+a_2=\lambda^q$$

avec

$$\lambda=\lambda(x), \qquad \lambda \neq 0,$$

---

[1] D. Mitrinovitch, *Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre* (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. 5, 1936, p. 10—22).

[2] E. Kamke, *Differentiagleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, 1942, S. 373.

* Voir le texte en langue serbe en ce qui concerne les formules numérotées en chiffres arabes.

l'équaton (1) est équivalente au système

$$\frac{dy}{dx}+a_1y+a_2=\lambda^q,$$

$$\frac{dy}{dx}+b_1y+b_2=\frac{c}{\lambda^q},$$

où la fonction $c(x)$ est définie par la relation

$$c^q=f(x).$$

Le dernier système fournit les relations (9) et (10). En exprimant que (9) est la dérivée de (10), on trouve pour λ l'équation différentielle (11), dans laquelle les coefficients

$$\alpha_0(x),\ \alpha_1(x),\ \alpha_2(x),\ \beta_0(x),\ \beta_1(x)$$

sont définis au moyen des formules (12).

L'équation (11) rentre dans la classe d'équations (13) — type d'A p p e l l.

Le degré de l'équation (11) est *un*, tandis que celui de l'équation (1) est $h\geqslant 2$.

3. D'après ce qui précède, on peut énoncer la

Proposition. *En effectuant sur la fonction inconnue* y *la transformation rationnelle*

$$y=-\frac{1}{b_1-a_1}\lambda^q+\frac{c}{b_1-a_1}\frac{1}{\lambda^p}+\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1},$$

l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}+a_1y+a_2\right)^p\left(\frac{dy}{dx}+b_1y+b_2\right)^q=f(x)$$

prend la forme

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{\alpha_0\lambda^{p+q+1}+\alpha_1\lambda^{p+1}+\alpha_2\lambda}{\beta_0\lambda^{p+q}+\beta_1},$$

où les coefficients sont des fonctions des

$$p,\ q,\ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ f$$

[voir les formules (12) dans le texte en langue serbe].

4. Chaque équation (1), dont les coefficients sont assujettis aux restrictions indiquées, en suivant le procédé qui vient d'être exposé, peut être réduite à la forme (11).

Proposons-nous maintenant le problème inverse consistant en ceci: *Étant donnée une équation (équation résolvante) de la forme*

$$\text{(R)}\qquad \frac{d\lambda}{dx}=\frac{A_0(x)\,\lambda^m+A_1(x)\,\lambda^n+A_2(x)\,\lambda}{B(x)\,\lambda^{m-1}+1}$$

(m et n = deux entiers positifs tels que $m\neq 1$, $n\neq 1$, $m\neq n$; $B\neq 0$), *déterminer l'équation initiale correspondante* (1).

Ce problème se résout par la

Proposition. *A chaque équation différentielle du premier ordre et du premier degré de la forme* (R), *correspond une équation du premier ordre et du degré* h *de la forme* (1), où

$$p,\ q,\ a_1(x),\ b_1(x),\ c(x)$$

sont définis par les formules[1]

$$\begin{aligned} p &= n-1, \\ q &= m-n, \\ a_1 &= (n-1)A_2 + (\log \tau)' + (\log B)', \\ b_1 &= (\log \tau)' - (m-n)\frac{A_0}{B}, \\ c &= \frac{m-n}{n-1}\frac{1}{B}, \end{aligned}$$

avec[2]

$$\tau = -(\log B)' - (m-n)\frac{A_0}{B} - (n-1)A_2;$$

e coefficient a_2 *est la solution de l'équation linéaire*

$$\frac{da_2}{dx} = (m-n)\frac{A_0}{B}a_2 + b_2' + b_2(\log B)' + (n-1)A_2 b_2 + (m-n)\frac{A_1}{B},$$

où b_2 *est arbitraire.*

5. D'après la dernière proposition, à une équation de la forme (*R*) correspond une équation de la forme (1), où intervient une fonction arbitraire.

Mettant à profit ce fait, on peut énoncer, par exemple,

Proposition. *Chaque cas d'intégrabilité de l'équation* (R) *conduit à une classe d'équations intégrables de la forme* (1), *avec une fonction arbitraire.*

6. Les cas de l'équation (1) pour:

$$\begin{array}{lll} 1^0 & p = 1, & q = 1; \\ 2^0 & p = -1, & q = 2; \\ 3^0 & p = 2, & q = -1 \end{array}$$

ont déjà fait l'objet de nos recherches[3], lesquelles sont résumées dans le nouveau *Traité* de Kamke[4], consacré à des équations différentielles.

Le 15 décembre 1947.
Institut de mathématiques de l'Université d'Etat à Skopié.

---

[1] $(\log \omega)'$ désigne

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dx}, \qquad \omega = \omega(x)$$

[2] On suppose que

$$\tau(x) \neq 0.$$

[3] D. Mitrinovitch, *Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre* (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade,* t. 5, 1936, p. 10—22).

[4] E. Kamke, *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen,* Bd. I, 1942, S. 373.