услов (35) је задовољен и коресподенти идентитет гласи:

$$3\cdot 1+8\cdot 4+\cdots+(5n-2)(3n-2)$$
$$\equiv\frac{1}{2}n(2n+1)(5n-3).$$

§ 20. Проблем чије смо делимично решење дали у претходном параграфу (§ 19) постаје утолико тежи уколико је број иницијалних прогресија већи, тј. број p (видети § 7)

На овоме проблему нећемо се више задржавати.

ГЛАВА ДРУГА

О ЈЕДНОЈ ЈЕДНАЧИНИ СА КОНАЧНИМ ДИФЕРЕНЦИЈАМА

§ 21. Посматрајмо идентитет

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$$
$$\equiv C_n^0 x^n+C_n^1 x^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}x \tag{36}$$

(n = цео позитиван број).

N. Nielsen[1], желећи да веже бројеве

$$C_n^p \quad (C_n^0=1)$$
$$(0\leqslant p\leqslant n)$$

за име математичара[2] који је први увидео значај тих бројева, назвао је бројеве C_n^p Stirling-овим бројевима *прве врсте*.

Према дефиниционој једнакости (36) може се рећи: да је број C_n^p једнак збиру $\binom{n-1}{p}$ могућних производа формираних од бројева

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,$$

под условом да сваки производ има p разних чинилаца.

Бројеви C_n^p јесу цели позитивни бројеви.

---

[1] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, 1906, S. 67.

[2] J. Stirling, *Methodus differentialis*. London, 1730, p. 11.

N. Nielsen[1], полазећи од идентитета (36), изградио је теорију Stirling-ових бројева на основу богате литературе и својих властитих студија о тим бројевима.

Ch. Jordan објавио је, 1933 године, једну монографију[2] о Stirling-овим бројевима, полазећи од идентитета

$$
(37)\qquad \begin{aligned} & x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) \\ & \qquad \equiv S_n^1 x + S_n^2 x^2 + \cdots + S_n^{n-1} x^{n-1} + S_n^n x^n . \end{aligned}
$$

Касније, 1939 године, Ch. Jordan објавио је једно обимно дело[3] из рачуна са коначним диференцијама у коме је велика пажња посвећена теорији, хисторијату и примени Stirling-ових бројева.

Навешћемо још ове чињенице према Jordan-у:

1⁰ Stirling-ови бројеви S_n^m задовољавају рекурентну релацију

$$
(38)\qquad S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - nS_n^m ,
$$

а то је једначина са коначним диференцијама.

2⁰ Решење једначине (38), у општем случају, није познато, али полазећи од

$$
S_1^0 = 0, \quad S_1^1 = 1 ,
$$

могу се израчунати, један за другим, Stirling-ови бројеви S_n^m. На тај начин могућно је саставити таблицу ових бројева.

3⁰ Решења једначине (38) дата су формулом

$$
S_n^{m-n} = K_{m,0}\binom{n}{2m} + K_{m,1}\binom{n}{2m-1} + \cdots + K_{m,m-1}\binom{n}{m+1}
$$

где су коефицијенти

$$
K_{m,p} \qquad\qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, m-1)
$$

дефинисани помоћу једначине са коначним диференцијама

$$
K_{m+1,p} + (2m - p + 1)\,(K_{m,p} + K_{m,p-1}) = 0 .
$$

---

[1] N. Nielsen, у поменутом делу, на стр. 300—320, дао је библиографски индекс у који су ушле све студије о Stirling-овим бројевима, објављене до 1906 године.

[2] Ch. Jordan, *On Stirling's Numbers* (*The Tôhoku Mathematical Journal*, Vol. 37, 1933, p. 254—278). — У овој расправи мађарски математичар Jordan скупио је различите познате формуле о Stirling-овим бројевима и извео неколико нових.

[3] Ch. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, Budapest, 1939, 654 стране. — Видети нарочито стр. 142—168. Ово је дело написано с обзиром на нове резултате о Stirling-овим бројевима који су објављени до 1939.

Решавање једначине (38) зависи од последње једначине чије решење у општем случају такође није познато.

§ 22. Полазна тачка наше методе је идентитет

$$(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,\ldots\,(x-n)$$

(39) $$\equiv x^n - \Phi_n^1\, x^{n-1} + \Phi_n^2\, x^{n-2} - \Phi_n^3\, x^{n-3}$$

$$+ \cdots + (-1)^k\, \Phi_n^k\, x^{n-k} + \cdots + (-1)^n\, \Phi_n^n.$$

Упоређењем идентитета (37) и (39) долази се до релације

(40) $$\Phi_n^m = (-1)^m S_{n+1}^{n-m+1}$$

којој се може дати и овај облик

$$S_n^m = (-1)^{n-m}\, \Phi_{n-1}^{n-m}.$$

Тако, на пример, имамо:

$$\Phi_n^1 = - S_{n+1}^n,$$

$$\Phi_n^2 = S_{n+1}^{n-1},$$

$$\Phi_n^3 = - S_{n+1}^{n-2},$$

$$\Phi_n^4 = S_{n+1}^{n-3},$$

$$\Phi_n^5 = - S_{n+1}^{n-4}.$$

Уопште је

$$\Phi_n^m = \left| S_{n+1}^{n-m+1} \right|.$$

Упоређењем идентитета (36) и (39) добијамо релацију

(41) $$\Phi_n^m = C_{n+1}^m.$$

Из дефиниционе формуле (39) излази да је број

$$\Phi_n^m \qquad (n \geqslant m > 0)$$

збир свих производа формираних од n првих бројева природног низа

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

с тим да сваки производ садржи m разних чинилаца.

Бројеви Φ_n^m јесу цели позитивни бројеви.

Непосредно можемо написати ове две формуле:

$$\Phi_n^1 = \frac{1}{2}\, n(n+1),$$

$$\Phi_n^n = n!\,.$$

§ 23. Број Φ_n^2 дефинисан је изразом:

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = & (1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + 1\cdot n) \\ & + (2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + 2\cdot n) \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + (n-1)\,n.\end{aligned}$$

Последњи израз може се овако трансформовати:

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = & \, n\,[1 + 2 + \cdots + (n-1)] \\ & + (n-1)\,[1 + 2 + \cdots + (n-2)] \\ & + \ldots\ldots\ldots + 2\cdot 1\end{aligned}$$

и најзад

(42) $$\Phi_n^2 = n\,\Phi_{n-1}^1 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^1 + \cdots + 2\,\Phi_1^1.$$

Будући да је:

$$\Phi_{n-1}^1 = \frac{1}{2}\,(n-1)\,n,$$

$$\Phi_{n-2}^1 = \frac{1}{2}\,(n-2)\,(n-1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_1^1 = 1,$$

формула (42) постаје

(43) $$2\,\Phi_n^2 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + (n-1)\,n^2.$$

У § 9 извели смо идентитет

(44) $$1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + n\,(n+1)^2$$
$$\equiv \frac{1}{12}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(3n+5).$$

Према (43) и (44) добијамо дефинитивни образац

(45) $$\Phi_n^2 = \frac{1}{24}(n-1)\,n\,(n+1)\,(3n+2).$$

§ 24. Број Φ_n^3 дефинисан је изразом

$$\begin{aligned}\Phi_n^3 = & (1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 4 + \cdots + 1\cdot 2\cdot n) \\ & + (1\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 5 + \cdots + 1\cdot 3\cdot n) \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + (n-2)\,(n-1)\,n\end{aligned}$$

коме се може дати облик

$$\Phi_n^3 = n[1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots+(n-2)(n-1)]$$
$$+(n-1)[1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots+(n-3)(n-2)]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+3\cdot 2\cdot 1$$

или најзад

(46) $$\Phi_n^3 = n\Phi_{n-1}^2+(n-1)\Phi_{n-2}^2+\cdots+3\Phi_2^2.$$

Из формуле (45) следује:

$$\Phi_{n-1}^2 = \frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(3n-1),$$

$$\Phi_{n-2}^2 = \frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)(3n-4),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_2^2 = 1\cdot 2.$$

Узимајући у обзир последње обрасце, налазимо

(47) $$24\Phi_n^3 = 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8+2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11+3\cdot 4\cdot 5^2\cdot 14 +\cdots+(n-2)(n-1)n^2(3n-1).$$

Применом резултата наведених у §§ 7 и 12, добијамо дефинитивни образац

(48) $$\Phi_n^3 = \frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2).$$

§ 25. Учинићемо у овом параграфу једну малу дигресију, наиме показаћемо како се ефективно примењује поступак из § 6, али нешто измењен, за израчунавање збира

(49) $$1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8+2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11+\cdots+(n-2)(n-1)n^2(3n-1).$$

Узмимо израз

(50) $$g(x, y) = \frac{x^n y^{3n}-1}{xy^3-1}$$

и формирајмо идентитет

$$g \equiv 1+xy^3+x^2y^6+\cdots+x^{n-1}y^{3n-3}.$$

Према томе можемо образовати и ове идентитете:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \equiv y^3 + 2\,xy^6 + \cdots + (n-1)\,x^{n-2}\,y^{3n-3},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \equiv 1 \cdot 2 \cdot y^6 + 2 \cdot 3 \cdot xy^9 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,x^{n-3}\,y^{3n-3},$$

$$L \equiv \lim_{y \to 1} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)$$

$$\equiv 1 \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 \cdot 11\,x + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot (3n-1)\,x^{n-3},$$

$$H = \frac{d}{dx}(x^3 L)$$

$$\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8\,x^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11\,x^3 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n\,(3n-1)\,x^{n-1}$$

$$G = \lim_{x \to 1} \frac{d}{dx}(xH)$$

$$\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 11 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n^2\,(3n-1).$$

Сада ћемо поћи од израза $g(x, y)$, који је дефинисан формулом (50), па ћемо редом израчунати

$$\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad L, \quad H.$$

На крају имамо, после заметних трансформација,

$$(x-1)^6 \frac{d}{dx}(xH) = n^2\,(n-1)\,(n-2)\,(3n-1)\,x^{n+5}$$

$$-(n-2)\,(n-1)\,(15\,n^3 + 10\,n^2 - 25\,n + 12)\,x^{n+4}$$

$$+2\,(n-2)\,(15\,n^4 + 10\,n^3 - 45\,n^2 - 16\,n + 48)\,x^{n+3}$$

$$-2\,(15\,n^5 - 5\,n^4 - 75\,n^3 - 19\,n^2 + 108\,n + 72)\,x^{n+2}$$

$$+n\,(n+1)\,(15\,n^3 - 5\,n^2 - 50\,n - 32)\,x^{n+1}$$

$$-n\,(n-1)\,(n+1)^2\,(3\,n+2)\,x^n$$

$$-24\,x^4 + 192\,x^3 + 144\,x^2.$$

Да бисмо израчунали G, узмимо израз

$$\frac{d}{dx}(xH),$$

дефинисан последњом релацијом и нађимо

$$\lim_{x \to 1} \frac{d}{dx}(xH).$$

Пошто шест пута узастопце применимо L'Hospital-ово правило и извршимо потребне алгебарске трансформације, добијамо идентитет:

(51) $$1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8+2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11+\cdots+(n-2)(n-1)n^2(3n-1)$$
$$\equiv\frac{1}{48}n^2(n+1)^2(n-1)(n-2).$$

§ 26. Напред смо извели формуле (§§ 23 и 24):

$$\Phi_n^2=n\Phi_{n-1}^1+(n-1)\Phi_{n-2}^1+\cdots+2\Phi_1^1,$$
$$\Phi_n^3=n\Phi_{n-1}^2+(n-1)\Phi_{n-2}^2+\cdots+3\Phi_2^2.$$

Није тешко показати да у општем случају вреди ова релација:

(52) $$\Phi_n^m=n\Phi_{n-1}^{m-1}+(n-1)\Phi_{n-2}^{m-1}+\cdots+m\Phi_{m-1}^{m-1}$$

где је

$$0<m\leqslant n.$$

Из формуле (52), која има фундаментални значај у овој расправи, могу се извести, на пример, ови закључци:

1^0 Да бисмо израчунали Φ_n^m, неопходно је претходно израчунати Φ_n^{m-1}, што у крајњој анализи значи да претходно треба израчунати

$$\Phi_n^1,\quad \Phi_n^2,\ \ldots,\ \Phi_n^{m-1};$$

2^0 Φ_n^m је полином по n степена $2m$.

§ 27. Ако сада применимо основни образац (52) за израчунавање Φ_n^4, имамо најпре

$$\Phi_n^4=n\Phi_{n-1}^3+(n-1)\Phi_{n-2}^3+\cdots+4\Phi_3^3.$$

Ова једнакост, с обзиром на (48), постаје:

(53) $$48\Phi_n^4=1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^3+2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 5^3+\cdots+(n-2)(n-3)(n-1)^2n^3.$$

Да бисмо нашли збир реда који се налази на десној страни релације (53), применићемо резултате из прве главе ове расправе.

Ради тога пођимо од израза

$$k(k+1)(k+2)^2(k+3)^3,$$

чији је развијен облик

$$k^7+14k^6+80k^5+238k^4+387k^3+324k^2+108k.$$

Стављајући овде редом

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

и сабирајући добијене вредности, долазимо до једнакости:

(54) $$1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 5^3 + \cdots + n(n+1)(n+2)^2(n+3)^3$$

$$\equiv \psi_7(n) + 14\,\psi_6(n) + 80\,\psi_5(n) + 238\,\psi_4(n) + 387\,\psi_3(n)$$

$$+ 324\,\psi_2(n) + 108\,\psi_1(n),$$

где је

(55) $$\psi_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p$$

$$(p = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7).$$

Ако се познате вредности:

$$\psi_1(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

$$\psi_2(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$\psi_3(n) = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

$$\psi_4(n) = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30},$$

$$\psi_5(n) = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12},$$

$$\psi_6(n) = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42},$$

$$\psi_7(n) = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

унесу у релацију (54), добија се:

(56) $$120 \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)^2(k+3)^3 \equiv 15n^8 + 300n^7 + 2510n^6$$

$$+ 11352n^5 + 29855n^4 + 45420n^3 + 36740n^2 + 12048n.$$

Полином који се јавља у последњој једнакости има факторе:

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4.$$

Према томе, идентитету (56) може се дати прикладнији облик

$$(57)\qquad \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)^2(k+3)^3 \equiv$$

$$\frac{1}{5!}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(15n^3+150n^2+485n+502).$$

На основу (53) и (57) налазимо дефинитивно

$$(58)\qquad \Phi_n^4 \equiv$$

$$\frac{1}{6!\cdot 8}(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)(n-3)(15n^3+15n^2-10n-8).$$

§ 28. Као што видимо, изналажење формуле за Φ_n^m компликује се све више и више са рашћењем броја m.

Наћи ћемо још формулу за број Φ_n^5 који је, према (52), дефинисан релацијом

$$(59)\qquad \Phi_n^5 = n\,\Phi_{n-1}^4 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^4 + \cdots + 5\,\Phi_4^4.$$

С обзиром на (58) можемо, место (59), писати

$$(60)\qquad \Phi_n^5 \equiv$$

$$\frac{1}{6!\cdot 8}\sum_{k=5}^{n} k^2(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(15k^3-30k^2+5k+2).$$

Посматрајмо сада израз

$$(k+4)^2(k+3)(k+2)(k+1)\,k\,[15(k+4)^3-30(k+4)^2+5(k+4)+2],$$

чији је развијен облик

$$15k^9+360k^8+3710k^7+21392k^6+75263k^5+164840k^4+218420k^3$$
$$+159008k^2+48192k.$$

Ако се у последњем изразу дају броју k редом ове вредности

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

па се сви тако формирани нумерички изрази саберу, налази се

$$(61)\qquad 15\psi_9(n)+360\,\psi_8(n)+3710\,\psi_7(n)+21392\,\psi_6(n)$$
$$+75263\,\psi_5(n)+164840\,\psi_4(n)+218420\,\psi_3(n)$$
$$+159008\,\psi_2(n)+48192\,\psi_1(n)$$

где је $\psi_p(n)$ израз одређен формулом (55).

Ако се збирови

$$\psi_p(n)\qquad (p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 7),$$

наведени у § 27, као и збирови:

$$\psi_8(n)=\frac{n^9}{9}+\frac{n^8}{2}+\frac{2n^7}{3}-\frac{7n^5}{15}+\frac{2n^3}{9}-\frac{n}{30},$$

$$\psi_9(n)=\frac{n^{10}}{10}+\frac{n^9}{2}+\frac{3n^8}{4}-\frac{7n^6}{10}+\frac{n^4}{2}-\frac{3n^2}{20}$$

унесу у израз (61), налази се:

$$\frac{n}{2}(3n^9+95n^8+1310n^7+10302\,n^6+50787n^5+162255n^4$$
$$+334620n^3+427348n^2+304480n+91200).$$

Лако је видети, на пример помоћу Horner-ове методе, да је последњи полином дељив производом:

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)^2(n+5)^2.$$

Стога, можемо написати идентитет:

$$(62)\qquad \sum_{k=1}^{n}(k+4)^2(k+3)(k+2)(k+1)\,k\,(15k^3+150k^2+485k+502)$$
$$\equiv\frac{n}{2}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)^2(n+5)^2(3n^2+23n+38).$$

На основу (62), *образац* (60) *добија овај дефинитивни облик:*

$$(63)\qquad \Phi_n^5\equiv$$
$$\frac{1}{6!\cdot 4^2}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\,n^2(n+1)^2(3n^2-n-6).$$

§ 29. Досада смо нашли формуле за

$$\Phi_n^m\qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Применом наше методе у могућности смо да изведемо редом формуле за бројеве

$$\Phi_n^6, \quad \Phi_n^7, \quad \Phi_n^8, \ldots$$

али је претходно потребно израчунати збирове

$$\psi_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p$$

за

$$p = 10,\ 11,\ 12,\ \ldots,\ 2m-1.$$

Дакле, показали смо да изналажење формула за бројеве

$$\Phi_n^m \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

према нашој методи, изискује само једноставне алгебарске операције.

Ова наша метода не само што је елементарна, већ и није мање практична од других познатих метода[1].

§ 30. Сада ћемо показати како се наша метода може искористити за формирање решења једначине са коначним диференцијама

$$S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - n S_n^m. \tag{64}$$

Према обрасцу (40) бројевима

$$\Phi_n^1, \quad \Phi_n^2 \quad \Phi_n^3, \quad \Phi_n^4, \quad \Phi_n^5$$

одговарају респективно:

$$-S_{n+1}^n, \quad S_{n+1}^{n-1}, -S_{n+1}^{n-2}, \quad S_{n+1}^{n\ 3}, -S_{n+1}^{n-4},$$

тако да на основу обрасца

$$\Phi_n^1 = \frac{1}{2}\, n(n+1)$$

и образаца (45), (48), (58), (63), долазимо до ових резултата:

---

[1] Упоредити методе које су дали: Cauchy, Schläfli, von Zeipel, Schlömilch а које је анализирао N. Nielsen на стр. 71—72 свога приручника: *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, 1906, Leipzig.

$$S_n^{n-1} = -\frac{1}{2}(n-1)\,n,$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{24}(n-2)(n-1)\,n\,(3n-1),$$

(65) $$S_n^{n-3} = -\frac{1}{48}(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2,$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{6!\cdot 2^3}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\,n(15n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{6!\cdot 2^4}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2(3n^2-7n-2).$$

То су решења једначине са коначним диференцијама (64);

Да бисмо нашли и друга решења те једначине, тј

$$S_n^{n-6},\quad S_n^{n-7},\quad S_n^{n-8},\ \ldots$$

треба, применом наше методе, наћи:

$$\Phi_n^6,\quad \Phi_n^7,\quad \Phi_n^8,\ \ldots$$

Напоменимо да се решењима (65) може дати и овај сажетији облик:

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2},$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1),$$

(66) $$S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}\,n\,(n-1),$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6}\,n\,(n-1)(3n^2-7n-2).$$

§ 31. Према (40), релацији (52) одговара рекурентна формула

(67) $$S_n^{n-m} + (n-1)\,S_{n-1}^{n-m} + (n-2)\,S_{n-2}^{n-m-1} + (n-3)\,S_{n-3}^{n-m-2} + \cdots + m\,S_m^1 = 0.$$

Тако, на пример, имамо:

$$S_9^4 = -(8\,S_8^4 + 7\,S_7^3 + 6\,S_6^2 + 5\,S_5^1)$$
$$= -67\,284$$
$$(n=9,\ m=5);$$

$$S_{12}^8 = -(11\,S_{11}^8 + 10\,S_{10}^7 + 9\,S_9^6 + 8\,S_8^5$$
$$+ 7\,S_7^4 + 6\,S_6^3 + 5\,S_5^2 + 4\,S_4^1)$$
$$= 357\,423.$$
$$(n=12,\ m=4).$$

Релација (67) може такође да послужи као полазна тачка за проучавање Stirling-ових бројева.

5 јануара 1948.
Математички институт
Државног универзитета у Скопју.

ТАБЛИЦА[1] STIRLING-ОВИХ БРОЈЕВА

ТАБЛИЦА[2] STIRLING-ОВЫХ ЧИСЕЛ

TABLEAU[3] DES NOMBRES DE STIRLING

I.

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2}.$$

$S_2^1 = -1$	$S_{19}^{18} = -171$	$S_{36}^{35} = -630$
$S_3^2 = -3$	$S_{20}^{19} = -190$	$S_{37}^{36} = -666$
$S_4^3 = -6$	$S_{21}^{20} = -210$	$S_{38}^{37} = -703$
$S_5^4 = -10$	$S_{22}^{21} = -231$	$S_{39}^{38} = -741$
$S_6^5 = -15$	$S_{23}^{22} = -253$	$S_{40}^{39} = -780$
$S_7^6 = -21$	$S_{24}^{23} = -276$	$S_{41}^{40} = -820$
$S_8^7 = -28$	$S_{25}^{24} = -300$	$S_{42}^{41} = -861$
$S_9^8 = -36$	$S_{26}^{25} = -325$	$S_{43}^{42} = -903$
$S_{10}^9 = -45$	$S_{27}^{26} = -351$	$S_{44}^{43} = -946$
$S_{11}^{10} = -55$	$S_{28}^{27} = -378$	$S_{45}^{44} = -990$
$S_{12}^{11} = -66$	$S_{29}^{28} = -406$	$S_{46}^{45} = -1\,035$
$S_{13}^{12} = -78$	$S_{30}^{29} = -435$	$S_{47}^{46} = -1\,081$
$S_{14}^{13} = -91$	$S_{31}^{30} = -465$	$S_{48}^{47} = -1\,128$
$S_{15}^{14} = -105$	$S_{32}^{31} = -496$	$S_{49}^{48} = -1\,176$
$S_{16}^{15} = -120$	$S_{33}^{32} = -528$	$S_{50}^{49} = -1\,225$
$S_{17}^{16} = -136$	$S_{34}^{33} = -561$	$S_{51}^{50} = -1\,275$
$S_{18}^{17} = -153$	$S_{35}^{34} = -595$	$S_{52}^{51} = -1\,326$

[1] Ову је Таблицу израдила Ковина Милошевић, студент математичке групе на Филозофском факултету у Скопју.

[2] Эта Таблица исчислена Ковиной Милошевич.

[3] Ce Tableau est fait par K. Milošević.

II.

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1).$$

$S_3^1 = 2$	$S_{24}^{22} = 35\,926$	$S_{45}^{43} = 475\,365$
$S_4^2 = 11$	$S_{25}^{23} = 42\,550$	$S_{46}^{44} = 519\,915$
$S_5^3 = 35$	$S_{26}^{24} = 50\,050$	$S_{47}^{45} = 567\,525$
$S_6^4 = 85$	$S_{27}^{25} = 58\,500$	$S_{48}^{46} = 618\,332$
$S_7^5 = 175$	$S_{28}^{26} = 67\,977$	$S_{49}^{47} = 672\,476$
$S_8^6 = 322$	$S_{29}^{27} = 78\,561$	$S_{50}^{48} = 730\,100$
$S_9^7 = 546$	$S_{30}^{28} = 90\,335$	$S_{51}^{49} = 791\,350$
$S_{10}^8 = 870$	$S_{31}^{29} = 103\,385$	$S_{52}^{50} = 856\,375$
$S_{11}^9 = 1\,320$	$S_{32}^{30} = 117\,800$	$S_{53}^{51} = 925\,327$
$S_{12}^{10} = 1\,925$	$S_{33}^{31} = 133\,672$	$S_{54}^{52} = 998\,361$
$S_{13}^{11} = 2\,717$	$S_{34}^{32} = 151\,096$	$S_{55}^{53} = 1\,075\,635$
$S_{14}^{12} = 3\,731$	$S_{35}^{33} = 170\,170$	$S_{56}^{54} = 1\,157\,310$
$S_{15}^{13} = 5\,005$	$S_{36}^{34} = 190\,995$	$S_{57}^{55} = 1\,243\,550$
$S_{16}^{14} = 6\,580$	$S_{37}^{35} = 213\,675$	$S_{58}^{56} = 1\,334\,522$
$S_{17}^{15} = 8\,500$	$S_{38}^{36} = 238\,317$	$S_{59}^{57} = 1\,430\,396$
$S_{18}^{16} = 10\,812$	$S_{39}^{37} = 265\,031$	$S_{60}^{58} = 1\,531\,345$
$S_{19}^{17} = 13\,566$	$S_{40}^{38} = 293\,930$	$S_{61}^{59} = 1\,637\,545$
$S_{20}^{18} = 16\,815$	$S_{41}^{39} = 325\,130$	$S_{62}^{60} = 1\,749\,175$
$S_{21}^{19} = 20\,615$	$S_{42}^{40} = 358\,750$	$S_{63}^{61} = 1\,866\,417$
$S_{22}^{20} = 25\,025$	$S_{43}^{41} = 394\,912$	$S_{64}^{62} = 1\,989\,456$
$S_{23}^{21} = 30\,107$	$S_{44}^{42} = 433\,741$	$S_{65}^{63} = 2\,118\,480$

III.

$$S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}n(n-1).$$

$S_4^1 = -6$	$S_{28}^{25} = -7\,739\,550$
$S_5^2 = -50$	$S_{29}^{26} = -9\,642\,906$
$S_6^3 = -225$	$S_{30}^{27} = -11\,921\,175$
$S_7^4 = -735$	$S_{31}^{28} = -14\,631\,225$
$S_8^5 = -1\,960$	$S_{32}^{29} = -17\,836\,160$
$S_9^6 = -4\,536$	$S_{33}^{30} = -21\,605\,760$
$S_{10}^7 = -9\,450$	$S_{34}^{31} = -26\,016\,936$
$S_{11}^8 = -18\,150$	$S_{35}^{32} = -31\,154\,200$
$S_{12}^9 = -32\,670$	$S_{36}^{33} = -37\,110\,150$
$S_{13}^{10} = -55\,770$	$S_{37}^{34} = -43\,985\,970$
$S_{14}^{11} = -91\,091$	$S_{38}^{35} = -51\,891\,945$
$S_{15}^{12} = -143\,325$	$S_{39}^{36} = -60\,947\,991$
$S_{16}^{13} = -218\,400$	$S_{40}^{37} = -71\,284\,200$
$S_{17}^{14} = -323\,680$	$S_{41}^{38} = -83\,041\,400$
$S_{18}^{15} = -468\,180$	$S_{42}^{39} = -96\,371\,730$
$S_{19}^{16} = -662\,796$	$S_{43}^{40} = -111\,439\,230$
$S_{20}^{17} = -920\,550$	$S_{44}^{41} = -128\,420\,446$
$S_{21}^{18} = -1\,256\,850$	$S_{45}^{42} = -147\,505\,050$
$S_{22}^{19} = -1\,689\,765$	$S_{46}^{43} = -168\,896\,475$
$S_{23}^{20} = -2\,240\,315$	$S_{47}^{44} = -192\,812\,565$
$S_{24}^{21} = -2\,932\,776$	$S_{48}^{45} = -219\,486\,240$
$S_{25}^{22} = -3\,795\,000$	$S_{49}^{46} = -249\,166\,176$
$S_{26}^{23} = -4\,858\,750$	$S_{50}^{47} = -282\,117\,500$
$S_{27}^{24} = -6\,160\,050$	$S_{51}^{48} = -318\,622\,500$

IV.

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15n^3 - 30n^2 + 5n + 2).$$

$S_5^1 =$	24	$S_{28}^{24} =$	626 334 345
$S_6^2 =$	274	$S_{29}^{25} =$	843 041 745
$S_7^3 =$	1 624	$S_{30}^{26} =$	1 122 686 019
$S_8^4 =$	6 769	$S_{31}^{27} =$	1 480 321 269
$S_9^5 =$	22 449	$S_{32}^{28} =$	1 933 889 244
$S_{10}^6 =$	63 273	$S_{33}^{29} =$	2 504 646 364
$S_{11}^7 =$	157 773	$S_{34}^{30} =$	3 217 636 444
$S_{12}^8 =$	357 423	$S_{35}^{31} =$	4 102 212 268
$S_{13}^9 =$	749 463	$S_{36}^{32} =$	5 192 609 268
$S_{14}^{10} =$	1 474 473	$S_{37}^{33} =$	6 528 574 668
$S_{15}^{11} =$	2 749 747	$S_{38}^{34} =$	8 156 055 558
$S_{16}^{12} =$	4 899 622	$S_{39}^{35} =$	10 127 949 468
$S_{17}^{13} =$	8 394 022	$S_{40}^{36} =$	12 504 921 117
$S_{18}^{14} =$	13 896 582	$S_{41}^{37} =$	15 356 289 117
$S_{19}^{15} =$	22 323 822	$S_{42}^{38} =$	18 760 986 517
$S_{20}^{16} =$	34 916 946	$S_{43}^{39} =$	22 808 599 177
$S_{21}^{17} =$	53 327 946	$S_{44}^{40} =$	27 600 486 067
$S_{22}^{18} =$	79 721 796	$S_{45}^{41} =$	33 250 985 691
$S_{23}^{19} =$	116 896 626	$S_{46}^{42} =$	39 888 712 941
$S_{24}^{20} =$	168 423 871	$S_{47}^{43} =$	47 657 950 791
$S_{25}^{21} =$	238 810 495	$S_{48}^{44} =$	56 720 141 346
$S_{26}^{22} =$	333 685 495	$S_{49}^{45} =$	67 255 480 866
$S_{27}^{23} =$	460 012 995	$S_{50}^{46} =$	79 464 623 490

V.

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6} n(n-1)(3n^2-7n-2).$$

$S_6^1 = -120$	$S_{29}^{24} = -55\,880\,640\,270$
$S_7^2 = -1\,764$	$S_{30}^{25} = -80\,328\,850\,875$
$S_8^3 = -13\,132$	$S_{31}^{26} = -114\,009\,431\,445$
$S_9^4 = -67\,284$	$S_{32}^{27} = -159\,899\,390\,784$
$S_{10}^5 = -269\,325$	$S_{33}^{28} = -221\,783\,846\,592$
$S_{11}^6 = -902\,055$	$S_{34}^{29} = -304\,437\,176\,604$
$S_{12}^7 = -2\,637\,558$	$S_{35}^{30} = -413\,836\,815\,700$
$S_{13}^8 = -6\,926\,634$	$S_{36}^{31} = -557\,414\,245\,080$
$S_{14}^9 = -16\,669\,653$	$S_{37}^{32} = -744\,348\,178\,728$
$S_{15}^{10} = -37\,312\,275$	$S_{38}^{33} = -985\,905\,441\,444$
$S_{16}^{11} = -78\,558\,480$	$S_{39}^{34} = -1\,295\,835\,552\,648$
$S_{17}^{12} = -156\,952\,432$	$S_{40}^{35} = -1\,690\,825\,581\,900$
$S_{18}^{13} = -299\,650\,806$	$S_{41}^{36} = -2\,191\,022\,426\,580$
$S_{19}^{14} = -549\,789\,282$	$S_{42}^{37} = -2\,820\,630\,280\,377$
$S_{20}^{15} = -973\,941\,900$	$S_{43}^{38} = -3\,608\,591\,714\,091$
$S_{21}^{16} = -1\,672\,280\,820$	$S_{44}^{39} = -4\,589\,361\,478\,702$
$S_{22}^{17} = -2\,792\,167\,686$	$S_{45}^{40} = -5\,803\,782\,865\,650$
$S_{23}^{18} = -4\,546\,047\,198$	$S_{46}^{41} = -7\,300\,077\,221\,745$
$S_{24}^{19} = -7\,234\,669\,596$	$S_{47}^{42} = -9\,134\,958\,017\,031$
$S_{25}^{20} = -11\,276\,842\,500$	$S_{48}^{43} = -11\,374\,881\,704\,208$
$S_{26}^{21} = -17\,247\,104\,875$	$S_{49}^{44} = -14\,097\,448\,488\,816$
$S_{27}^{22} = -25\,922\,927\,745$	$S_{50}^{45} = -17\,392\,967\,051\,250$
$S_{28}^{23} = -38\,343\,278\,610$	$S_{51}^{46} = -21\,366\,198\,225\,750$

Резюме

О ЧИСЛАХ STIRLING-A

от

Д. С. МИТРИНОВИЧА

1. Первая глава этой работы относится к исследованию формулы, представляющей сумму выражений

$$\text{(I)}\qquad \prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r+(n-1)\alpha_r],$$

где n и p являются двумя целыми положительными числами, а

$$a_r \text{ и } \alpha_r \qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p)$$

обозначают произвольные константы.

Сумму выражений (I) можем получить несколькими способами (см. §§ 5, 6, 7 сербского текста).

В случае если $p=2$, получаем формулу (4).[1]

В случае когда $p=3$, получаем формулы (24) и (23).

За случай $p=4$ соответствующая формула дана выражениями (26) и (25).

В параграфе 18 показываем, что некоторые тождества указанные в Таблицах Рыжика[2]) и Адамса[3]) являются партикулярными случаями формул, изложенных в этом исследовании (см. §§ 1–17).

2. Вторая глава этой работы посвящена одному способу, который даёт решения уравнения

$$\text{(II)}\qquad S_{n+1}^{m} = S_n^{m-1} - n\, S_n^m$$

связанного с теорией чисел Stirling-a.

Решение уравнения (II) в общем случае неизвестно.

Наш способ прост и обоснован на результатах означенных в главе первой. Этот способ состоится в следующем.

Возьмем тождество

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} & x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \\ & \qquad \equiv S_n^1 x + S_n^2 x^2 + \cdots + S_n^{n-1} x^{n-1} + S_n^n x^n \end{aligned}$$

где n обозначает целое положительное число и где S_n^m представляют числа Stirling-a.

Числа Stirling-a удовлетворяют реляцию (II).

Вместо чисел S рассмотрим числа Φ, определенные тождеством

$$\text{(IV)}\qquad \begin{aligned} & (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n) \\ & \qquad \equiv x^n - \Phi_n^1 x^{n-1} + \Phi_n^2 x^{n-2} - \Phi_n^3 x^{n-3} \\ & \qquad\quad + \cdots + (-1)^k \Phi_n^k x^{n-k} + \cdots + (-1)^n \Phi_n^n. \end{aligned}$$

---

[1]) Формулы, нумерованные, арабскими цифрами относятся к тексту на сербском язике.

[2]) И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Огиз — Гостехиздат, 1943, Москва—Ленинград, 400 стр. — См. особенно стр. 242–243.

[3]) E. P. Adams, *Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions*, Washington, 1922, 314 pages. — См. особенно стр. 18.

Если сравним тождества (III) и (IV), получаем

(V) $$\Phi_n^m = (-1)^m \, S_{n+1}^{n \cdot m+1}, \qquad S_n^m = (-1)^{n \cdot m} \, \Phi_{n-1}^{n \cdot m}.$$

Из формулы (IV) получаем

$$\Phi_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \Phi_n^n = n!,$$

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = {} & (1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + 1\cdot n) \\ & + (2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + 2\cdot n) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (n-1)n.\end{aligned}$$

Последнее выражение можем написать

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = {} & n\,[1+2+\cdots+(n-1)] \\ & + (n-1)\,[1+2+\cdots+(n-2)] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + 2\cdot 1\end{aligned}$$

или

(VI) $$\Phi_n^2 = n\,\Phi_{n-1}^1 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^1 + \cdots + 2\,\Phi_1^1.$$

Числа Φ_n^3 определяются формулой

$$\begin{aligned}\Phi_n^3 = {} & (1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 4 + \cdots + 1\cdot 2\cdot n) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (n-2)(n-1)\,n\end{aligned}$$

или

(VII) $$\Phi_n^3 = n\,\Phi_{n-1}^1 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^2 + \cdots + 3\,\Phi_2^2.$$

В общем случае имеем формулу

$$\Phi_n^m = n\,\Phi_{n-1}^{m-1} + (n-1)\,\Phi_{n-2}^{m-1} + \cdots + m\,\Phi_{m-1}^{m-1}$$

где

$$0 < m \leqslant n.$$

Так как

$$\Phi_{n-1}^1 = \frac{1}{2}(n-1)\,n,$$

$$\Phi_{n-2}^1 = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_1^1 = 1$$

формула (VI) принимает вид

$$2\,\Phi_n^2 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + (n-1)\,n^2.$$

и наконец (см. § 9, 2⁰)

$$\text{(VIII)}\qquad \Phi_n^2 = \frac{1}{24}(n-1)\,n\,(n+1)\,(3\,n+2).$$

Формула (VII), согласно с формулой (VIII), становится

$$24\,\Phi_n^3 = 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n^2\,(3\,n-1)$$

и наконец (см. § 25, формула 51):

$$\Phi_n^3 = \frac{1}{48}\,n^2\,(n+1)^2\,(n-1)\,(n-2).$$

Повторяя тот же способ получаем формулы

$$\Phi_n^4 =$$

$$\frac{1}{6!\cdot 8}(n+1)\,n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(15n^3+15n^2-10n-8),$$

$$\Phi_n^5 =$$

$$\frac{1}{6!\cdot 16}(n-4)\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n^2(n+1)^2\,(3n^2-n-6),$$

. . . .

Согласно с формулой (V) получаем

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2},$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1),$$

$$S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}\,n(n-1),$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15\,n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6}\,n(n-1)\,(3n^2-7n-2),$$

. . . .

Последние формулы являются решениями уравнения (II).

3. В конце этой работы приложена, как дополнение, одна таблица Stirling-овых чисел.

Résumé

SUR LES NOMBRES DE STIRLING

par

D. S. MITRINOVITCH

1. Le premier chapitre de cette étude (§§ 1—20) est relatif à la recherche d'une formule fournissant la somme de l'expression

$$\text{(I)} \qquad \prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r+(n-1)\alpha_r],$$

où n et p sont deux entiers positifs et où

$$a_r \text{ et } \alpha_r \qquad (r=1, 2, 3, \ldots, p)$$

désignent des constantes quelconques.

La somme de l'expression (I) peut être obtenue au moyen de plusieurs procédés (*cf.* les §§ 5, 6, 7 du texte en langue serbe).

Pour le cas $p=2$, on a la formule (4).[1]

Dans le cas où $p=3$, on admet les formules (24) et (23).

Pour le cas $p=4$, la formule cherchée est fournie par (26) et (25).

Dans le § 18 on montre que plusieurs identités, indiquées dans les *Tables* de Ryjik[2] et d'Adams[3], sont contenues, comme cas particuliers, dans les formules développées dans cette étude (*cf.* §§ 1—17 du texte en langue serbe).

2. Le second chapitre est consacré à un procédé fournissant des solutions de l'équation aux différences finies

$$\text{(II)} \qquad S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - n\, S_n^m,$$

rattachée à la théorie des coefficients de Stirling.

La solution de l'équation (II), dans le cas général, est inconnue.

Le procédé en question, simple et élémentaire, lequel est fondé sur des résultats énoncés dans le premier chapitre, consiste en ceci.

Envisageons l'identité

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} & x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) \\ & \equiv S_n^1 x + S_n^2 x^2 + \cdots + S_n^{n-1} x^{n-1} + S_n^n x^n, \end{aligned}$$

où n désigne l'entier positif et où S_n^m sont les coefficients de Stirling de première espèce.

Les coefficients de Stirling satisfont à la relation (II).

Au lieu des nombres S considérons les nombres Φ définis par l'identité

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} & (x-1)(x-2)\cdots(x-n) \\ & \equiv x^n - \Phi_n^1 x^{n-1} + \Phi_n^1 x^{n-2} - \Phi_n^3 x^{n-3} \\ & + \cdots + (-1)^k \Phi_n^k x^{n-k} + \cdots + (-1)^n \Phi_n^n. \end{aligned}$$

---

[1] Les formules numérotés par chiffres arabes se rapportent au texte en langue serbe.

[2] Ryjik, *Tables d'intégrales, de sommes, de séries et de produits*, Moscou — Leningrad, 1943, 400 pages (en ruse), — Voir, en particulier, p. 242—243.

[3] Adams, *Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions*, Washington, 1922, 314 pages. — Voir, particulièrement, p. 28.

La comparaison de (III) et (IV) conduit à

$$\text{(V)}\qquad \begin{aligned}\Phi_n^m &= (-1)^m S_{n+1}^{n-m+1},\\ S_n^m &= (-1)^{n-m}\Phi_{n-1}^{n-m}.\end{aligned}$$

De (IV) il s'ensuit

$$\Phi_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \Phi_n^n = n!,$$

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = &(1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + 1\cdot n)\\ &+(2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + 2\cdot n)\\ &+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ &+(n-1)n.\end{aligned}$$

La dernière expression s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\Phi_n^2 = &n[1+2+\cdots+(n-1)]\\ &+(n-1)[1+2+\cdots+(n-2)]\\ &+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ &+2\cdot 1\end{aligned}$$

ou bien

$$\text{(VI)}\qquad \Phi_n^2 = n\,\Phi_{n-1}^1 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^1 + \cdots + 2\,\Phi_1^1.$$

Les nombres Φ_n^3 sont déterminés au moyen de l'expression

$$\begin{aligned}\Phi_n^3 = &(1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 4 + \cdots + 1\cdot 2\cdot n)\\ &+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\ &+(n-2)(n-1)n\end{aligned}$$

ou bien

$$\text{(VII)}\qquad \Phi_n^3 = n\,\Phi_{n-1}^2 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^2 + \cdots + 3\,\Phi_2^2.$$

Dans le cas général, on a la formule

$$\Phi_n^m = n\,\Phi_{n-1}^{m-1} + (n-1)\,\Phi_{n-2}^{m-1} + \cdots + m\,\Phi_{m-1}^{m-1}$$

avec

$$0 < m \leqslant n.$$

Puisque

$$\Phi_{n-1}^1 = \frac{1}{2}(n-1)n,$$

$$\Phi_{n-2}^1 = \frac{1}{2}(n-2)(n-1),$$

$$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$\Phi_1^1 = 1,$$

a formule (VI) devient

$$2\,\Phi_n^2 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + (n-1)n^2$$

et enfin (*cf.* § 9, exemple 2°)

$$\text{(VIII)} \qquad \Phi_n^2 = \frac{1}{24}(n-1)\,n\,(n+1)\,(3n+2).$$

La formule (VII), d'après (VIII), prend la forme

$$24\,\Phi_n^3 = 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11 + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n^2\,(3n-1)$$

et enfin (*cf.* § 25, formule 51):

$$\Phi_n^3 = \frac{1}{48}\,n^2(n+1)^2\,(n-1)\,(n-2).$$

En suivant la même voie, on trouve les formules:

$$\Phi_n^4 =$$

$$\frac{1}{6!\cdot 8}(n+1)\,n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(15n^3+15n^2-10n-8),$$

$$\Phi_n^5 =$$

$$\frac{1}{6!\cdot 16}(n-4)\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,n^2(n+1)^2\,(3n^2-n-6)$$

. . . .

D'après (V) on obtient:

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2},$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1),$$

$$S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}\,n(n-1),$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6}\,n(n-1)\,(3n^2-7n-2),$$

. . . .

Les dernières formules définissent des solutions de l'équation aux différences finies (II).

3. A la fin de cette étude est donné, comme complément, un tableau des nombres de Stirling.

Le 5 janvier 1948.
Institut de mathématiques de l'Université
d'Etat à Skopié