О STIRLING-ОВИМ БРОЈЕВИМА

од

ДРАГОСЛАВА С. МИТРИНОВИЋА

УВОД

У првој глави ове расправе изводимо формулу за изналажење збира реда са коначним бројем чланова

$$\prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r+(n-1)\alpha_r],$$

где су n и p цели позитивни бројеви и где су

$$a_r \text{ и } \alpha_r \qquad (r=1, 2, 3, \ldots, p)$$

ма какве константе,

Резултати које износимо у овој глави нису без интереса, јер у математичкој литератури нисмо наишли да је проблем, који се овде расправља, дат у таквој генералности како ми то чинимо.

У истој глави показујемо да наше формуле садрже, као партикуларне случајеве, неке формуле које су наведене у Рижик-овим *Таблицама интеграла, збирова, редова и производа*[1].

Предмет друге главе је решавање једначине са коначним диференцијама

$$S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - n\, S_n^m$$

$$(m \text{ и } n \text{ су цели позитивни бројеви})$$

коју задовољавају Stirling-ови коефицијенти прве врсте S_n^m, дефинисани помоћу идентитета

[1] И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Огиз-Гостехиздат, 1943, 400 стр., Москва—Ленинград. — У овим *Таблицама* има преко 5000 формула.

$$
\begin{aligned}
&x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)\\
&\equiv S_n^1 x+S_n^2 x^2+\cdots+S_n^{n-1}x^{n-1}+S_n^n x^n.
\end{aligned}
$$

У овој глави дајемо једну нову методу[1], елементарну и једноставну, за изналажење решења наведене једначине са коначним диференцијама, што претставља прилог важној теорији Stirling-ових бројева, који интервенишу у разним проблемима[2]. Решавање те једначине заснивамо на резултатима наведеним у првој глави ове расправе.

На крају је приложена таблица Stirling-ових бројева коју је, према нашим формулама, израдила Ковина Милошевић.

Професор Михаило Петровић[3] испитао је 1940 године ову расправу и она је била онда примљена за осму књигу часописа *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade.*

За време окупације рукопис те расправе изгорео је са још неколико расправа које су имале да буду објављене у поменутом часопису Математичког семинара Универзитета у Београду. Ми смо једну копију те расправе сачували и тако се она сада појављује, у знатно проширеном облику, у *Годишњем зборнику Филозофског факултета у Скопју.*

ГЛАВА ПРВА

О ЈЕДНОМ НИЗУ АРИТМЕТИЧКИХ ПРОГРЕСИЈА

§ 1. Означимо са n један цео позитиван број, и са

$$a,\ b,\ \alpha,\ \beta$$

ма какве константе.

---

[1] Видети један врло кратак приказ те методе у нашем саопштењу Белгиској академији наука:

D. Mitrinovitch, *Sur un procédé fournissant des solutions d'une équation aux différences finies rattachée à la théorie des coefficients de Stirling* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, Classe des sciences, 5e série, t. 33, 1947, p. 244–247).

[2] 1° Ch. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, 1939, Budapest. — Нарочито видети стр. 142–168.

2° Видети такође:

J. Karamata, *Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant* (*Mathematica*, Cluj, t. 9, 1935, p. 164–178).

[3] Михаило Петровић, велики српски математичар, који је створио математичку школу у Београду, умро је 1943 године у Београду, за време фашистичке окупације.

Посматрајмо две аритметичке прогресије

$$a, a+\alpha, a+2\alpha, \ldots, a+(n-1)\alpha;$$

$$b, b+\beta, b+2\beta, \ldots, b+(n-1)\beta$$

и формирајмо низ

$$ab, (a+\alpha)(b+\beta), (a+2\alpha)(b+2\beta), \ldots$$
$$\ldots, [a+(n-1)\alpha][b+(n-1)\beta]$$

чији су чланови производи чланова истог ранга датих прогресија

Томе низу одговара следећи ред са коначним бројем чланова

$$(1)\qquad ab+(a+\alpha)(b+\beta)+(a+2\alpha)(b+2\beta)+\cdots$$
$$\cdots+[a+(n-1)\alpha][b+(n-1)\beta].$$

Поставимо задатак да израчунамо збир тог реда.

§ 2. *Први поступак.* Уочимо израз

$$(2)\qquad g(x,y)=\frac{(x^{\alpha}y^{\beta})^{n}-1}{x^{\alpha}y^{\beta}-1}$$

и формирајмо идентитет

$$(3)\qquad g(x,y)\equiv 1+x^{\alpha}y^{\beta}+x^{2\alpha}y^{2\beta}+\cdots+x^{(n-1)\alpha}y^{(n-1)\beta}.$$

Посматрањем израза (1) и идентитета (3) може се написати нови идентитет

$$\lim_{y\to 1}\frac{d}{dy}\left[y^{b}\lim_{x\to 1}\frac{\partial(x^{a}g)}{\partial x}\right]$$
$$\equiv ab+(a+\alpha)(b+\beta)+\cdots+[a+(n-1)\alpha][b+(n-1)\beta],$$

где место g треба ставити његов израз, дефинисан формулом (2).

Када се у последњем идентитету изврше врло заметне и дугачке назначене операције, долази се до врло једноставног идентитета

$$(4)\qquad ab+(a+\alpha)(b+\beta)+\cdots+[a+(n-1)\alpha][b+(n-1\beta]$$
$$\equiv\frac{n}{6}\left[2\alpha\beta n^{2}+3(\alpha b+\beta a-\alpha\beta)n+\alpha\beta-3(\alpha b+\beta a)+6ab\right].$$

§ 3. *Други поступак.* Ако се са $f(n)$ означи израз

$$(5)\qquad ab+(a+\alpha)(b+\beta)+\cdots+[a+(n-1)\alpha][b+(n-1)\beta].$$

тада се има идентитет

(6) $$f(n+1)-f(n)\equiv(a+n\alpha)\,(b+n\beta).$$

Израз $f(n)$ је дакле, један полином по n, трећег степена, наиме

(7) $$f(n)=An^3+Bn^2+Cn+D,$$

где коефицијенте A, B, C, D треба одредити у функцији од a, b, α, β.

Идентитет (6) даје систем једначина:

(8) $$\begin{aligned} 3A &= \alpha\beta, \\ 3A+2B &= \alpha b+\beta a \\ A+B+C &= ab, \end{aligned}$$

одакле излази:

(9) $$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}\alpha\beta, \\ B &= \frac{1}{2}(\alpha b+\beta a-\alpha\beta), \\ C &= ab+\frac{1}{6}\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha b+\beta a). \end{aligned}$$

За $n=1$, израз $f(n)$, према (5) и (7), постаје

$$f(1)=ab=A+B+C+D,$$

и пошто је, према релацијама (8),

$$A+B+C=ab.$$

добија се

(10) $$D=0.$$

Ако се коефицијенти A, B, C, D у изразу (7) смене нађеним вредностима (9) и (10), долази се до формуле (4) коју смо већ нашли помоћу једног сасвим другог начина.

§ 4. *Трећи поступак.* Посматрајмо израз

(11) $$[a+(k-1)\alpha]\,[b+(k-1)\beta],$$

чији је развијен облик

(12) $$(a-\alpha)\,(b-\beta)+(\alpha b+\beta a-2\alpha\beta)\,k+\alpha\beta k^2.$$

Ако се у изразу (11), односно (12), редом ставља

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

и тако добијени изрази саберу, добија се

$$(a-\alpha)(b-\beta)n+(\alpha b+\beta a-2\alpha\beta)S_1+\alpha\beta S_2, \tag{13}$$

где је

$$S_1=1+2+3+\cdots+n,$$

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2.$$

Пошто је

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

израз (13), после једноставних трансформација, добија облик

$$\frac{n}{6}\left[2\alpha\beta n^2+3(\alpha b+\beta a-\alpha\beta)+\alpha\beta-3(\alpha b+\beta a)+6ab\right]$$

који је идентичан изразу наведеном у формули (4).

Тако смо до формуле (4) дошли на три разна начина.

§ 5. Сада ћемо решити општији проблем.

Нека су

$$n \quad \text{и} \quad p\geqslant 2$$

два цела позитивна броја и нека су

$$a_r \quad \text{и} \quad \alpha_r \qquad (r=1, 2, 3, \ldots, p)$$

ма какве константе.

Посматрајмо сада p аритметичких прогресија

$$a_r,\ a_r+\alpha_r,\ a_r+2\alpha_r,\ \ldots,\ a_r+(n-1)\alpha_r$$

$$(r=1, 2, 3, \ldots, p).$$

Формирајмо израз

$$\prod_{r=1}^{r=p}a_r+\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+\alpha_r)+\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+2\alpha_r)+\cdots+\prod_{r=1}^{r=p}[a_r+(n-1)\alpha_r] \tag{14}$$

и *потражимо збир тог израза са коначним бројем чланова.*

§ 6. Да бисмо нашли збир реда (14), користећи први од наведених поступака (§ 2), имали бисмо да пођемо од израза:

$$g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p)=\frac{\left(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\ldots x_p^{\alpha_p}\right)^n-1}{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\ldots x_p^{\alpha_p}-1} \tag{15}$$

и да формирамо идентитет

$$(16)\qquad g \equiv 1 + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_p^{\alpha_p} + x_1^{2\alpha_1} x_2^{2\alpha_2} x_3^{2\alpha_3} \ldots x_p^{2\alpha_p} + \cdots$$
$$\cdots + x_1^{(n-1)\alpha_1} x_2^{(n-1)\alpha_2} x_3^{(n-1)\alpha_3} \ldots x_p^{(n-1)\alpha_p}.$$

Овај поступак изискивао је компликована израчунавања и за најпростији случај када је $p=2$, а за $p>2$ изискиваће очевидно далеко заметнија израчунавања.

За $p=3$ требало би израчунати граничну вредност

$$(17)\qquad \lim_{x_3\to 1} \frac{d}{dx_3}\left\{ x_3^{a_3} \lim_{x_2\to 1} \frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_2^{a_2} \lim_{x_1\to 1} \frac{\partial(x_1^{a_1} g)}{\partial x_1}\right]\right\},$$

где је

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{\left(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}\right)^n - 1}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} - 1}.$$

Израз (17) дефинише збир реда

$$a_1 a_2 a_3 + (a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2)(a_3+\alpha_3) + \cdots$$
$$\cdots + [a_1+(n-1)\alpha_1][a_2+(n-1)\alpha_2][a_3+(n-1)\alpha_3].$$

У општем случају, треба израчунати изразе:

$$(18)\qquad \begin{aligned} L_1 &= \lim_{x_1\to 1} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^{a_1} g), \\ L_2 &= \lim_{x_2\to 1} \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2^{a_2} L_1), \\ L_3 &= \lim_{x_3\to 1} \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3^{a_3} L_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_p &= \lim_{x_p\to 1} \frac{d}{dx_p}(x_p^{a_p} L_{p-1}), \end{aligned}$$

где је g функција од

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$$

дефинисана формулом (15).

Овај поступак, који може имати известан теориски интерес, није подесан за практична израчунавања.

Збир реда (14) одређен је изразом L_p.

§ 7. Да бисмо применили други од наведених поступака за израчунавање збира израза (14), треба узети као полазну тачку идентитет

$$f(n+1)-f(n)\equiv\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+n\alpha_r),\tag{19}$$

где $f(n)$ означава израз (14).

Према томе, $f(n)$ је један полином по n и његов је степен $(p+1)$, тј. полином $f(n)$ је облика

$$f(n)=A_1\,n^{p+1}+A_2\,n^p+\cdots+A_{p+1}\,n+A_{p+2}.\tag{20}$$

Коефицијенти A_i се израчунавају помоћу линеарних једначина.

Заиста, идентитет (19) доводи до овог система линеарних једначина:

$$\begin{aligned}
&(p+1)\,A_1=\prod\alpha_r,\\
&\binom{p+1}{2}A_1+\binom{p}{1}A_2=\prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1},\\
&\binom{p+1}{3}A_1+\binom{p}{2}A_2+\binom{p-1}{1}A_3=\prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2},\\
&\binom{p+1}{4}A_1+\binom{p}{3}A_2+\binom{p-1}{2}A_3\\
&\qquad+\binom{p-2}{1}A_4=\prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdot\frac{a_3}{\alpha_3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\binom{p+1}{k}A_1+\binom{p}{k-1}A_2+\binom{p-1}{k-2}A_3+\binom{p-2}{k-3}A_4+\cdots\\
&\qquad\cdots+\binom{p-k+2}{1}A_k=\prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdots\frac{a_{k-1}}{\alpha_{k-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_1+A_2+A_3+\cdots+A_p+A_{p+1}=\Pi a_r.
\end{aligned}\tag{21}$$

У последњем систему једначина употребили смо, ради краткоће у писању, ове ознаке:

$$\prod\alpha_r=\prod_{r=1}^{r=p}\alpha_r,$$

$$\sum\frac{a_1}{\alpha_1}=\frac{a_1}{\alpha_1}+\frac{a_2}{\alpha_2}+\cdots+\frac{a_p}{\alpha_p},$$

$$\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}=\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}+\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_3}{\alpha_3}+\cdots+\frac{a_{p-1}}{\alpha_{p-1}}\cdot\frac{a_p}{\alpha_p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdots \frac{a_k}{\alpha_k} = \text{збиру производа израза}$$

$$\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \ldots, \frac{a_p}{\alpha_p}$$

узетих k по k $(k \leq p)$.

Из релације (20) излази

$$f(1) = A_1 + A_2 + \cdots + A_{p+1} + A_{p+2},$$

или, према (14),

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_{p+1} + A_{p+2} = \Pi a_r.$$

Упоређењем ове релације са последњом од наведених у систему (21), добија се

$$A_{p+2} = 0,$$

што значи да је полином $f(n)$ дељив са n.

Систем (21) од $(p+1)$ једначина првога степена са $(p+1)$ непознатих

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{p+1}$$

има јединствени скуп решења, пошто је детерминанта тог система

$$(p+1)!,$$

тј. вредност која је увек различита од нуле, јер је, према претпоставци,

$$p \geqslant 2.$$

Коефицијенти полинома (20)

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{p+1} \tag{22}$$

јесу линеарне комбинације израза:

$$\prod \alpha_r, \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}, \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2}, \ldots$$

$$\ldots, \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdots \frac{a_k}{\alpha_k}, \ldots, \prod a_r.$$

Коефицијенти (22) израчунавају се лако на овај начин:

Из прве од једначина система (21) израчунава се A_1, из друге једначине A_2 и уопште из k-те једначине A_k, тако да је A_k линеарна комбинација израза:

$$\prod \alpha_r,\ \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1},\ \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}\frac{a_2}{\alpha_2},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdots\frac{a_{k-1}}{\alpha_{k-1}}$$

$$(k=2,\ 3,\ \ldots,\ p+1).$$

§ 8. За случај када је $p=3$, систем (21) доводи до решења:

$$A_1 = \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

$$A_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1\alpha_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3 a_1 + \alpha_3\alpha_1 a_2) - \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 a_2 a_3 + \alpha_2 a_3 a_1 + \alpha_3 a_1 a_2)$$

$$- \frac{1}{2}(\alpha_1\alpha_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3 a_1 + \alpha_3\alpha_1 a_2) + \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \tag{23}$$

$$A_4 = a_1 a_2 a_3 + \frac{1}{6}(\alpha_1\alpha_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3 a_1 + \alpha_3\alpha_1 a_2)$$

$$- \frac{1}{2}(\alpha_1 a_2 a_3 + \alpha_2 a_3 a_1 + \alpha_3 a_1 a_2).$$

Према томе, извели смо следећи идентитет:

$$a_1a_2a_3 + (a_1+\alpha_1)\ (a_2+\alpha_2)\ (a_3+\alpha_3) + \cdots \tag{24}$$

$$\cdots + [a_1+(n-1)\alpha_1]\ [a_2+(n-1)\alpha_2]\ [a_3+(n-1)\alpha_3]$$

$$\equiv n(A_1 n^3 + A_2 n^2 + A_3 n + A_4),$$

где су коефицијенти A_1, A_2, A_3, A_4 *дефинисани формулама* (23).

§ 9. *Примери за формулу* (24).

1⁰ За партикуларне вредности:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

формула (24) постаје

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \equiv \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

а то је добро познати идентитет.

2^0 За партикуларне вредноси:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = 2,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,$$

формула (24) постаје

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n(n+1)^2$$
$$\equiv \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

У напред цитираним Рижик-овим *Таблицама*, на стр. 242, наведена је формула

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 \equiv \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

која је идентична са нашом формулом.

3^0 За партикуларне вредности

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = 2,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,$$

добија се идентитет

$$1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \cdots + n^2(n+1)$$
$$\equiv \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

4^0 За партикуларне вредности:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 8,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 3$$

имамо идентитет

$$1 \cdot 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 \cdot 11 + \cdots + n(n+1)(3n+5)$$
$$\equiv \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(9n+23).$$

§ 10. У случају када је $p=4$, из система (21) добија се:

$$A_1=\frac{1}{5}\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$

$$A_2=\frac{1}{4}\,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3a_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4a_3+\alpha_1\alpha_3\alpha_4a_2+\alpha_2\alpha_3\alpha_4a_1)$$
$$-\frac{1}{2}\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$

$$A_3=\frac{1}{3}\,(\alpha_1\alpha_2a_3a_4+\alpha_1\alpha_3a_2a_4+\alpha_1\alpha_4a_2a_3+\alpha_2\alpha_3a_1a_4$$
$$+\alpha_2\alpha_4a_1a_3+\alpha_3\alpha_4a_1a_2)$$
$$-\frac{1}{2}\,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3a_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4a_3+\alpha_1\alpha_3\alpha_4a_2+\alpha_2\alpha_3\alpha_4a_1)$$
$$+\frac{1}{3}\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$

$$A_4=\frac{1}{2}\,(\alpha_1a_2a_3a_4+\alpha_2a_1a_3a_4+\alpha_3a_1a_2a_4+\alpha_4a_1a_2a_3) \tag{25}$$
$$-\frac{1}{2}\,(\alpha_1\alpha_2a_3a_4+\alpha_1\alpha_3a_2a_4+\alpha_1\alpha_4a_2a_3+\alpha_2\alpha_3a_1a_4$$
$$+\alpha_2\alpha_4a_1a_3+\alpha_3\alpha_4a_1a_2)$$
$$+\frac{1}{4}\,(\alpha_1\alpha_2\alpha_3a_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4a_3+\alpha_1\alpha_3\alpha_4a_2+\alpha_2\alpha_3\alpha_4a_1),$$

$$A_5=a_1a_2a_3a_4$$
$$-\frac{1}{2}\,(\alpha_1a_2a_3a_4+\alpha_2a_1a_3a_4+\alpha_3a_1a_2a_4+\alpha_4a_1a_2a_3)$$
$$+\frac{1}{6}\,(\alpha_1\alpha_2a_3a_4+\alpha_1\alpha_3a_2a_4+\alpha_1\alpha_4a_2a_3+\alpha_2\alpha_3a_1a_4$$
$$+\alpha_2\alpha_4a_1a_3+\alpha_3\alpha_4a_1a_2)$$
$$-\frac{1}{30}\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Према томе, *извели смо овај идентитет:*

$$a_1a_2a_3a_4+(a_1+\alpha_1)\,(a_2+\alpha_2)\,(a_3+\alpha_3)\,(a_4+\alpha_4)+\cdots \tag{26}$$
$$\cdots+[a_1+(n-1)\alpha_1]\,[a_2+(n-1)\alpha_2]\,[a_3+(n-1)\alpha_3][a_4+(n-1)\alpha_4]$$
$$\equiv n\,(A_1\,n^4+A_2\,n^3+A_3\,n^2+A_4\,n+A_5),$$

где су коефицијенти A_i *дефинисани формулама* (25).

§ 11. *Примери за формулу* (26).

1^0 $$1\cdot 2\cdot 3\cdot 8+2\cdot 3\cdot 4\cdot 11+\cdots+n(n+1)(n+2)(3n+2)$$
$$\equiv\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(3n+7);$$

2^0 $$1\cdot 2\cdot 3^2+2\cdot 3\cdot 4^2+\cdots+n(n+1)(n+2)^2$$
$$\equiv\frac{1}{20}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+11);$$

3^0 $$1\cdot 2^3+2\cdot 3^3+\cdots+n(n+1)^3$$
$$\equiv\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)(12n^2+39n+29);$$

4^0 $$1^2\cdot 2^2+2^2\cdot 3^2+\cdots+n^2(n+1)^2\equiv 2^2+6^2+\cdots+(n^2+n)^2$$
$$\equiv\frac{1}{15}n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1);$$

5^0 $$1\cdot 2^2\cdot 3+2\cdot 3^2\cdot 4+\cdots+n(n+1)^2(n+2)$$
$$\equiv\frac{1}{10}n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3).$$

§ 12. Посматрањем коефицијената A_i, наведених у § 10, видимо да су они хомогени полиноми по

$$a_r \text{ и } \alpha_r \qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

и да је степен хомогенеитета тих полинома 4.

Уопште, степен хомогенеитета полинома A_i једнак је броју аритметичких прогресија из којих се формира наш ред са коначним бројем чланова, множењем чланова истог ранга датих аритметичких прогресија.

Да би формуле, којима су дефинисани коефицијенти A_i, биле што подесније за употребу, уведимо неке нове ознаке.

Ознаком

$$H_i^k \qquad (i\geqslant k)$$

обележимо израз који се добија на овај начин:

1^0 Формирати комбинације без понављања класе k од i елемената

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_i.$$

2^0 Формирати комбинације без понављања класе $(i-k)$ од i елемената

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_i.$$

Комбинација и од једних и од других елемената биће подједнак број, јер је

$$\binom{i}{k} = \binom{i}{i-k}.$$

3⁰ Узети две такве комбинације, једну од елемената α_r, другу од елемената a_r, тако да се у тим двема комбинацијама, посматрајући их истовремено, сваки од индекса

$$1, 2, 3, \ldots, i$$

појављује, али само једанпут. За такве две комбинације казаћемо да су *кореспонсентне*

4⁰ Формирати производе по две и две кореспондентне комбинације и тако добијене производе сабрати.

Тим поступком добијени израз, према договору, означимо са H_i^k.

Пример. Дати су елементи:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5;$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.$$

Образовати: H_5^3.

Комбинације треће класе од елемената α јесу:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_4, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_5,$$
$$\alpha_1\alpha_3\alpha_4, \quad \alpha_1\alpha_3\alpha_5, \quad \alpha_1\alpha_4\alpha_5,$$
$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \quad \alpha_2\alpha_3\alpha_5, \quad \alpha_2\alpha_4\alpha_5,$$
$$\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

Комбинације друге класе од елемената a јесу:

$$a_1a_2, \quad a_1a_3, \quad a_1a_4, \quad a_1a_5,$$
$$a_2a_3, \quad a_2a_4, \quad a_2a_5,$$
$$a_3a_4, \quad a_3a_5,$$
$$a_4a_5.$$

Кореспондентне комбинације, на пример, јесу:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \quad \text{и} \quad a_4a_5;$$
$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \quad \text{и} \quad a_1a_5.$$

Према дефиницији израза H_i^k, имамо у конкретном случају:

$$\begin{aligned} H_5^3 = {} & \alpha_1\alpha_2\alpha_3a_4a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4a_3a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_5a_3a_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4a_2a_5 \\ & + \alpha_1\alpha_3\alpha_5a_2a_4 + \alpha_1\alpha_4\alpha_5a_2a_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4a_1a_5 \\ & + \alpha_2\alpha_3\alpha_5a_1a_4 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5a_1a_3 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5a_1a_2. \end{aligned}$$

Са новим симболом H_i^k формуле из § 10 имају облик:

$$A_1 = \frac{1}{5} H_4^4,$$

$$A_2 = \frac{1}{4} H_4^3 - \frac{1}{2} H_4^4,$$

$$A_3 = \frac{1}{3} H_4^2 - \frac{1}{2} H_4^3 + \frac{1}{3} H_4^4,$$

$$A_4 = \frac{1}{2} H_4^1 - \frac{1}{2} H_4^2 + \frac{1}{4} H_4^3,$$

$$A_5 = H_4^0 - \frac{1}{2} H_4^1 + \frac{1}{6} H_4^2 - \frac{1}{30} H_4^4,$$

где је

$$H_4^0 = a_1 a_2 a_3 a_4.$$

Уопште може се доказати да су коефицијенти

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_{p+1},$$

који се јављају у изразу (20), облика:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \lambda_{11} H_p^p, \\
A_2 &= \lambda_{21} H_p^{p-1} + \lambda_{22} H_p^p, \\
A_3 &= \lambda_{31} H_p^{p-2} + \lambda_{32} H_p^{p-1} + \lambda_{33} H_p^p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_k &= \lambda_{k1} H_p^{p-k+1} + \lambda_{k2} H_p^{p-k+2} + \cdots + \lambda_{kk} H_p^p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{p+1} &= \lambda_{p+1,1} H_p^0 + \lambda_{p+1,2} H_p^1 + \cdots + \lambda_{p+1,p+1} H_p^p,
\end{aligned}$$

где су $\lambda_{\eta\nu}$ нумеричке константе које треба одредити. Неке од тих констаната могу бити једнаке нули.

§ 13. Да бисмо нашли збир реда (14), на основу поступка наведеног у § 4 ове расправе, потребно је развити израз

$$\prod_{r=1}^{r=p} [a_r + (n-1)\alpha_r]$$

и уредити га по n. То ће бити један полином по n, степена p, наиме

(27) $$\Delta_0 n^p + \Delta_1 n^{p-1} + \cdots + \Delta_{p-1} n + \Delta_p$$

где су коефицијенти

$$\Delta_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p)$$

полиноми по

$$a_r \text{ и } \alpha_r \qquad (r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p).$$

Ако у изразу

$$\Delta_0\, k^p + \Delta_1\, k^{p-1} + \cdots + \Delta_{p-1}\, k + \Delta_p$$

стављамо редом

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

добијамо n израза чији је збир

(28) $$\Delta_0\, S_p + \Delta_1\, S_{p-1} + \cdots + \Delta_{p-1}\, S_1 + n\,\Delta_p,$$

где је

(29) $$S_i = 1^i + 2^i + \cdots + n^i$$
$$(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p).$$

Према томе, да бисмо овим поступком нашли збир реда (14), потребно је претходно знати формуле збирова (29).

§ 14. Ради примене поступка наведеног у § 13, узмимо случај $p=4$. Полином (27) тада постаје

$$\Delta_0\, n^4 + \Delta_1\, n^3 + \Delta_2\, n^2 + \Delta_3\, n + \Delta_4,$$

где Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 имају вредности:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,\\
\Delta_1 &= \alpha_1\alpha_2(\alpha_3 a_4 + \alpha_4 a_3 - 2\alpha_3\alpha_4)\\
&\quad + \alpha_3\alpha_4(\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 - 2\alpha_1\alpha_2),\\
\Delta_2 &= \alpha_1\alpha_2(a_3-\alpha_3)(a_4-\alpha_4)\\
&\quad + \alpha_3\alpha_4(a_1-\alpha_1)(a_2-\alpha_2)\\
&\quad + (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 - 2\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3 a_4 + \alpha_4 a_3 - 2\alpha_3\alpha_4),\\
\Delta_3 &= (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 - 2\alpha_1\alpha_2)(a_3-\alpha_3)(a_4-\alpha_4)\\
&\quad + (\alpha_3 a_4 + \alpha_4 a_3 - 2\alpha_3\alpha_4)(a_1-\alpha_1)(a_2-\alpha_2),\\
\Delta_4 &= (a_1-\alpha_1)(a_2-\alpha_2)(a_3-\alpha_3)(a_4-\alpha_4).
\end{aligned}$$

Израз (28), у овом партикуларном случају, постаје

(30) $$\Delta_0 S_4 + \Delta_1 S_3 + \Delta_2 S_2 + \Delta_3 S_1 + n\,\Delta_4.$$

На основу познатих формула

$$S_1 = \frac{1}{2}\, n\,(n+1),$$

$$S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

$$S_3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2,$$

$$S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

израз (30), иза извршених трансформација, добија вид

$$B_1 n^5 + B_2 n^4 + B_3 n^3 + B_4 n^2 + B_5 n,$$

где коефицијенти

$$B_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

имају вредности:

$$B_1 = \frac{1}{5} \Delta_0,$$

$$B_2 = \frac{1}{4} (2\Delta_0 + \Delta_1),$$

$$B_3 = \frac{1}{6} (2\Delta_0 - 3\Delta_1 + 2\Delta_2),$$

$$B_4 = \frac{1}{4} (\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3),$$

$$B_5 = \frac{1}{30} (-\Delta_0 + 5\Delta_2 + 15\Delta_3 + 30\Delta_4).$$

Ако се у ове формуле унесу вредности за Δ_i, које су горе дефинисане, долази се до закључка да су задовољени услови:

$$B_i \equiv A_i$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

где су A_i коефицијенти одређени у § 10.

Значи да смо и овим поступком дошли до формуле (26) већ изведене једним другим начином (§ 10).

§ 15. Ако се упореде три описана поступка за изналажење збира (14), долази се до констатације:

1⁰ да је други поступак најподеснији;

2⁰ да је други поступак општији од трећег, јер да бисмо применили трећи поступак, треба претходно знати збирове

$$S_i = 1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i;$$

међутим према другом поступку збирови S_i изналазе се као партикуларни случајеви резултата наведених у § 7, ако се стави:

$$\alpha_k = 1, \quad a_k = 1$$
$$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p).$$

§ 16. За израчунавање збирова

$$S_i = 1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i$$

обично се употребљавају рекурентне формуле.

Ако искористимо резултате наведене у § 7, за израчунавање збирова S_i можемо употребити доле описани начин.

Полазна тачка јесте систем једначина (21). У томе систему појављују се изрази

$$\prod \alpha_r,\ \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1},\quad \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdots \frac{a_{k-1}}{\alpha_{k-1}},\ \ldots,\ \prod a_r.$$

Пошто је у овом случају

$$\alpha_k = 1, \quad a_k = 1 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p)$$

последњи изрази постају:

$$1,\ \binom{p}{1},\ \binom{p}{2},\ \ldots,\ \binom{p}{k-1},\ \ldots,\ \binom{p}{p}.$$

Према томе, *имамо идентитет:*

$$1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i \equiv A_1 n^{i+1} + A_2 n^i + \cdots + A_{i+1} n.$$

Коефицијенти

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{i+1}$$

дефинисани су овим системом линеарних једначина:

$$(i+1)\ A_1 = 1,$$
$$\binom{i+1}{2} A_1 + \binom{i}{1} A_2 = \binom{i}{1},$$
$$\binom{i+1}{3} A_1 + \binom{i}{2} A_2 + \binom{i-1}{1} A_3 = \binom{i}{2},$$
$$\binom{i+1}{4} A_1 + \binom{i}{3} A_2 + \binom{i-1}{2} A_3 + \binom{i-2}{1} A_4 = \binom{i}{3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{i+1}{k}A_1+\binom{i}{k-1}A_2+\binom{i-1}{k-2}A_3+\binom{i-2}{k-3}A_4$$

$$+\cdots+\binom{i-k+2}{1}A_k=\binom{i}{k-1},$$

. . . .

$$A_1+A_2+A_3+\cdots+A_i+A_{i+1}=\binom{i}{i}.$$

§ 17. Да бисмо, на пример, израчунали

$$S_4=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$$

можемо поћи од последњег система и тамо ставити $i=4$. Тада се добија

$$5A_1=1,$$

$$\binom{5}{2}A_1+\binom{4}{1}A_2=\binom{4}{1},$$

$$\binom{5}{3}A_1+\binom{4}{2}A_2+\binom{3}{1}A_3=\binom{4}{2},$$

$$\binom{5}{4}A_1+\binom{4}{3}A_2+\binom{3}{2}A_3+\binom{2}{1}A_4=\binom{4}{3},$$

$$A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=1.$$

Последњи систем даје решење:

$$A_1=\frac{1}{5},\quad A_2=\frac{1}{2},\quad A_3=\frac{1}{3},\quad A_4=0,\quad A_5=-\frac{1}{30}.$$

Из овог примера се види како можемо израчунати S_i, а да претходно не морамо знати

$$S_{i-1},\quad S_{i-2},\ \ldots,\ S_1.$$

§ 18. У Рижик-овим *Таблицама интеграла, збирова, редова и производа*[1] налазе се на стр. 243 ове формуле:

$$\sum_{k=1}^{n}[p+(k-1)q]\ (p+kq)\equiv\frac{n}{6}(2q^2n^2+6pqn+6p^2-2q^2);$$

[1] И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Огиз-Гостехиздат, 1943, Москва—Ленинград, 400 стр.

$$\sum_{k=1}^{n} [p+(k-1)q]\ (p+kq)\ [p+(k+1)q$$

$$\equiv \frac{n}{12}[3q^3n^3+6q^2(2p+q)n^2+3q(6p^2+6pq-q^2)n$$
$$+(12p^3+18p^2q-6pq^2-6q^3)];$$

$$\sum_{k=1}^{n} [p+(k-1)q]\ (p+kq)\cdots[p+(k+r)q]$$

$$\equiv \frac{1}{(r+3)q}\Big\{[p+(n-1)q]\ (p+nq)\cdots[p+(n+r+1)q]$$
$$+p(p+q)\cdots[p+(r+1)q]\ (q-p)\Big\};$$

$$\sum_{k=1}^{n} [p+(k-1)q]\,(p+kq)^2\,[p+(k+1)q]$$

$$\equiv \frac{n}{10}[10\,p^4+20\,(n+1)\,p^3q+10\,n\,(2n+3)p^2q^2$$
$$+10\,(n+1)\,(n^2+n-1)pq^3$$
$$+(n+1)\,(2n+1)\,(n^2+n-2)q^4].$$

Прва од горе наведених формула може се написати на овај начин:

(31) $$p\,(p+q)+(p+q)\ (p+2q)+\cdots+[p+(n-1)q]\ (p+nq)$$
$$\equiv \frac{n}{6}\,(2q^2n^2+6pqn+6p^2-2q^2).$$

Израз који се јавља на левој страни последњег идентитета јесте партикуларни случај нашег израза (1) када је

$$a=p,\quad b=p+q,$$
$$\alpha=q,\quad \beta=q.$$

За ове вредности a, b, α, β, полином

$$2\alpha\beta n^2+3\,(\alpha b+\beta a-\alpha\beta)\,n+\alpha\beta-3\,(\alpha b+\beta a)+6ab$$

постаје

$$2q^2n^2+6pqn+6p^2-2q^2.$$

Према томе, показали смо да је формула (31), која је споменута у Рижик-овим *Таблицама*, обухваћена нашом формулом (4), као партикуларни случај.

Ако се сада у формулу (24) унесу вредности

$$a_1 = p, \quad a_2 = p + q; \quad a_3 = p + 2q;$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = q,$$

добија се, после извршених трансформација, друга од формула наведених у Рижик-овим *Таблицама.*

Идентитет (26) за вредности

$$a_1 = p, \quad a_2 = p + q, \quad a_3 = p + q, \quad a_4 = p + 2q;$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = q$$

постоје управо четврта од наведених формула из Рижик-ових *Таблица.*

За трећу формулу није тешко доказати да је и она садржана у нашим резултатима (§ 7), као партикуларни случај.

На стр. 242 Рижик-ових *Таблица* налазе и ове формуле:

$$\sum_{k=1}^{n} k(n^2 - k^2) \equiv \frac{1}{4} n^2 (n^2 - 1),$$

$$\sum_{k=1}^{q} k(n^2 - k^2) \equiv \frac{1}{4} q(q+1)\ (2n^2 - q^2 - q),$$

а на стр. 243

$$\sum_{k=1}^{n} k(p + k - 1) \equiv \frac{1}{6} n(n+1)\ (3p + 2n - 2),$$

$$\sum_{k=1}^{n} (p - k + 1)\ (q - k + 1) \equiv \frac{1}{6} n[6pq - (n-1)(3p + 3q - 2n + 1)].$$

Лако је показати да су последње четири формуле из Рижик-ових *Тадлица* садржане у нашој формули (24) односно (4).

Рижик у својим *Таблицама* наводи да су му Adams-ове *Таблице*[1] послужиле као основни извор за писање IV. одељка који се односи на суме, редове и производе. У Adams-овим *Таблицама* на стр. 28 налазе се ове формуле:

[1] E. P. Adams, *Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions*, Washington, 1922, 314 p.

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)\equiv\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3);$$

$$1\cdot2\cdot3\cdots r+2\cdot3\cdot4\cdots(r+1)+$$
$$+\cdots+n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)$$
$$\equiv\frac{1}{r+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+r);$$

$$1\cdot p+2\cdot(p+1)+3\cdot(p+2)+\cdots+n(p+n-1)$$
$$\equiv\frac{1}{6}n(n+1)(3p+2n-2);$$

$$p\cdot q+(p-1)\cdot(q-1)+(p-2)\cdot(q-2)+\cdots+(p-n)\cdot(q-n)$$
$$\equiv\frac{1}{6}n[6pq-(n-1)(3p+3q-2n+1)].$$

Очевидно је да наше формуле (видети §§ 2, 7, 8) обухватају, као партикуларне случајеве, горе наведене формуле из Adams-ових *Таблица*.

§ 19. Посматрајмо два реда са коначним бројем чланова

$$1\cdot1+3\cdot4+5\cdot7+\cdots+(2n-1)(3n-2),$$
$$3\cdot8+4\cdot9+5\cdot10+\cdots+(n+2)(n+7).$$

Њихови збирови су, према формули (4), респективно

$$\frac{1}{2}n(4n^2-n-1),$$
$$\frac{1}{3}n(n+7)(n+8).$$

Према томе, први од напред наведених збирова не може се претставити као производ линеарних фактора по n са рационалним коефицијентима, док се други збир може претставити као производ таквих фактора.

Поставимо сада *задатак*, који може бити од интереса, *да се нађу такве две прогресије:*

$$a,\ a+\alpha,\ a+2\alpha,\ \ldots,\ a+(n-1)\alpha,$$
$$b,\ b+\beta,\ b+2\beta,\ \ldots,\ b+(n-1)\beta$$

(a, b, α, β су нумеричке константе и уз то рационални бројеви) *да би збир реда*

$$ab+(a+\alpha)(b+\beta)+\cdots+[a+(n-1)\alpha][b+(n-1)\beta] \tag{32}$$

могао бити изражен као производ линеарних фактора по n са рационалним коефицијентима.

Ако збир (32) има наведену особину, казаћемо да ужива особину (R).

Нећемо улазити у решавање овог проблема у општем случају, већ ћемо се ограничити на то што ћемо навести четири довољна услова.

1^0 Ако је

$$\alpha=1, \quad \beta=1$$

и ако је

$$[3(a+b)+1]^2-48ab \tag{33}$$

потпун квадрат, тада израз (32) ужива особину (R).

Пример. За $a=5$, $b=1$ услов (33) је задовољан. Одговарајући идентитет, према (4), биће

$$5\cdot 1+6\cdot 2+\cdots+(n+4)n\equiv\frac{1}{3}n(n+1)\,(2n+13).$$

2^0 Ако је $\alpha=a$, збир (32) има особину (R).

У овом случају формула (4) постаје

$$ab+2a(b+\beta)+\cdots+na[b+(n-1)\beta]$$
$$\equiv\frac{1}{6}an(n+1)(2\beta n+3b-2\beta).$$

Напоменимо да је напред наведена претпоставка да су

$$a,\ b,\ \alpha,\ \beta$$

нумеричке константе и то рационални бројеви.

Примери:

$$1\cdot 5+2\cdot 8+3\cdot 11+\cdots+n(3n+2)$$
$$\equiv\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3);$$

$$3\cdot 7+6\cdot 9+9\cdot 11+\cdots+3n(2n+5)$$
$$\equiv\frac{1}{2}n(n+1)(4n+17).$$

3^0 Ако између

$$a,\ b,\ \alpha,\ \beta$$

постоји веза

$$\alpha=\frac{3\beta-2b}{5\beta-3b}\,a, \tag{34}$$

збир (32) има особину (R).

У овом случају збир реда је

$$\frac{1}{3}n(n+2)(\lambda n+\mu),$$

где је

$$\lambda=\alpha\beta=\frac{3\beta-2b}{5\beta-3b}a\beta,$$

$$\mu=\frac{7\beta b-3\beta^2-3b^2}{5\beta-3b}a.$$

Пример. Када је

$$a=7,\quad b=1,\quad \alpha=4,\quad \beta=2,$$

услов (34) је задовољен.

Одговарајући идентитет гласи:

$$7\cdot 1+11\cdot 3+\cdots+(4n+1)(2n-1)$$

$$\equiv\frac{1}{3}n(n+2)(8n-1).$$

Из (34) видимо да је могућно образовати колико хоћемо редова (32) са особином (R) ако су a b, β ма какви рационални бројеви.

4^0 Ако између бројева

$$a,\ b,\ \alpha,\ \beta$$

постоји зависност исказана релацијом

$$\alpha=\frac{3\beta\quad 4b}{2\beta-3b}a, \tag{35}$$

тада ред (32) ужива особину (R).

Збир реда (32) има тада облик:

$$\frac{1}{6}n(2n+1)(\lambda n+\mu),$$

где је

$$\lambda=\alpha\beta=\frac{3\beta-4b}{2\beta-3b}a\beta,$$

$$\mu=\frac{8b\beta-3\beta^2-6b^2}{2\beta-3b}$$

Пример. За

$$a=3,\quad b=1,\quad \alpha=5,\quad \beta=3$$