Dr Драгослав С. Митриновић, Скопље

О ЈЕДНОЈ ЛИНЕАРНОЈ ПАРЦИЈАЛНОЈ ЈЕДНАЧИНИ

ГЛАВА ТРЕЋА

IV. Посматрајмо функцију

$$z = x^{a_1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{a_2} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots + x^{a_n} f_n\left(\frac{y}{x}\right) \tag{17}$$

тј.

$$z = \sum_{k=1}^{n} x^{a_k} f_k\left(\frac{y}{x}\right),$$

где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дате различите константе, а $f_1, f_2, \ldots, f_n$ произвољне функције аргумента $\frac{y}{x}$.

Показаћемо да је могућно образовати једну једину релацију између промењљивих x и y, функције z и њених парцијалних извода. Та релација биће независна од облика функција $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Да бисмо то постигли, поћи ћемо од релације (17) и користићемо се теоремом о хомогеним функцијама.

Дакле, можемо написати овај низ једнакости:

$$F_1 = xp + yq = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{a_k} f_k,$$

$$F_2 = (xp + yq)^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k - 1) x^{a_k} f_k,$$

$$F_3 = (xp + yq)^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k - 1)(a_k - 2) x^{a_k} f_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_n = (xp + yq)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k - 1)(a_k - 2)\ldots(a_k - n + 1) x^{a_k} f_k,$$

тј.

$$F_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k\, x^{a_k} f_k\,,$$

$$F_2 = 2!\sum_{k=1}^{n} \binom{a_k}{2} x^{a_k} f_k\,,$$

$$\text{(18)}\qquad F_3 = 3!\sum_{k=1}^{n} \binom{a_k}{3} x^{a_k} f_k\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_n = n!\sum_{k=1}^{n} \binom{a_k}{n} x^{a_k} f_k\,,$$

Елиминацијом n параметара $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из $(n+1)$ релација (17) и (18), долази се до једначине:

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ F_1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ F_2 & 2!\binom{a_1}{2} & 2!\binom{a_2}{2} & \ldots & 2!\binom{a_n}{2} \\ F_3 & 3!\binom{a_1}{3} & 3!\binom{a_2}{3} & \ldots & 3!\binom{a_n}{3} \\ . & . & . & \ldots & . \\ F_n & n!\binom{a_1}{n} & n!\binom{a_2}{n} & \ldots & n!\binom{a_n}{n} \end{vmatrix} = 0.$$

Ако детерминанту која се јавља у последњој једначини развијемо по елементима прве колоне, долазимо до једначине

$$\text{(19)}\qquad \Delta_0 z - \Delta_1 (xp + yq) + \Delta_2 (xp + yq)^{(2)} - \Delta_3 (xp + yq)^{(3)} + \ldots + (-1)^n \Delta_n (xp + yq)^{(n)} = 0,$$

где су $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ детерминанте реда n чије вредности зависе од $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Најпре имамо[1])

$$\Delta_0 = 2!\,3!\,4!\dots n! \begin{Vmatrix} a_1 \\ \binom{a_1}{2} \\ \binom{a_1}{3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \binom{a_1}{n} \end{Vmatrix}$$

тј.

$$\Delta_0 = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_1(a_1-1) \\ a_1(a_1-1)(a_1-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1(a_1-1)(a_1-2)\dots(a_1-n+1) \end{Vmatrix}.$$

Алтернанта Δ_0 има вредност[2]) :

$$\Delta_0 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n \cdot P,$$

где је P производ:

$$\begin{aligned} P = (a_2-a_1)\,(a_3-a_1)\,(a_4-a_1)\dots(a_n-a_1) \\ (a_3-a_2)\,(a_4-a_2)\dots(a_n-a_2) \\ (a_4-a_3)\dots(a_n-a_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_n-a_{n-1}). \end{aligned}$$

Детерминанте $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$ јесу такође алтернанте.

---

[1]) Ради краткоће у писању, договоримо се да нам убудуће симбол

$$\begin{Vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda \end{Vmatrix}$$

означава детерминанту из чије је матрице наведена само прва колона.

[2]) Богдан Гавриловић, **Теорија детерминаната,** стр. 162 (Београд, 1899).

Δ_n је дефинисано детерминантом

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_1(a_1-1) \\ a_1(a_1-1)(a_1-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1(a_1-1)(a_1-2)\dots(a_1-n+2) \end{Vmatrix}$$

чија је вредност

$$\Delta_n = P,$$

где је P производ који смо горе дефинисали.

Послужићемо се сада једном теоремом[1] која се односи на алтернанте: свака алтернанта A

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(a_1) & \varphi_0(a_2) & \dots & \varphi_0(a_n) \\ \varphi_1(a_1) & \varphi_1(a_2) & \dots & \varphi_1(a_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_{n-1}(a_1) & \varphi_{n-1}(a_2) & \dots & \varphi_{n-1}(a_n) \end{vmatrix}$$

може се без остатка поделити производом P. Количник $\frac{A}{P}$ је симетрична функција по

$$a_1, a_2, \dots a_n.$$

Према изложеном једначина (19) добија облик

$$S_0 z - S_1(xp+yq) + S_2(xp+yq)^{(2)} - S_3(xp+yq)^{(3)} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}(xp+yq)^{(n-1)} + (-1)^n (xp+yq)^{(n)} = 0,$$

где су $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$

симетричне функције по

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n,$$

тј.

$$S_k = \frac{\Delta_k}{P}.$$

[1]) Богдан Гавриловић, **Теорија детерминаната,** стр. 164 (Београд, 1899).

Отуда можемо исказати овај

Став. Линеарна парцијална једначина реда n

$$S_0 z = S_1 (xp + yq) - S_2 (xp + yq)^{(2)} + \ldots + (-1)^n S_{n-1} (xp + yq)^{(n-1)} + \\ + (-1)^{n+1} (xp + yq)^{(n)},$$

где је

$$S_0 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n,$$

$$S_k = \frac{1}{P} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 \\ a_1 \\ a_1 (a_1 - 1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 (a_1 - 1)(a_1 - 2) \ldots (a_1 - k + 2) \\ a_1 (a_1 - 1)(a_1 - 2) \ldots (a_1 - k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1 (a_1 - 1)(a_1 - 2) \ldots (a_1 - n + 1) \end{matrix} \right\|$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n - 1),$$

има за општи интеграл

$$z = x^{a_1} f_1 \left(\frac{y}{x}\right) + x^{a_2} f_2 \left(\frac{y}{x}\right) + \ldots + x^{a_n} f_n \left(\frac{y}{x}\right),$$

где су f_1, f_2, ..., f_n произвољне функције назначеног аргумента.

V. Посматраћемо сада неке партикуларне случајеве.

1. Пођимо од релације ($a \neq b$)

$$z = x^a f_1 + x^b f_2 \tag{20}$$

$$\left(f_1 = f_1 \left(\frac{y}{x}\right), \quad f_2 = f_2 \left(\frac{y}{x}\right) \right),$$

из које следује

$$xp + yq = a x^a f_1 + b x^b f_2, \tag{21}$$

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = a(a-1) x^a f_1 + b(b-1) x^b f_2. \tag{22}$$

Резултат елиминације f_1 и f_2 из релација (20), (21) и (22) дат је једначином

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 1 \\ xp + yq & a & b \\ x^2 r + 2xys + y^2 t & a(a-1) & b(b-1) \end{vmatrix} = 0.$$

После развијања детерминанте, која се налази на левој страни последње једначине, има се

$$z = \frac{a+b-1}{ab}(xp + yq) - \frac{1}{ab}(x^2 r + 2xys + y^2 t).$$

Према томе имамо овај резултат:

Општи интеграл парцијалне једначине

$$x^2 r + 2xys + y^2 t - (a+b-1)(xp + yq) + abz = 0$$

дат је релацијом

$$z = x^a f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^b f_2\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (a \neq b),$$

где су f_1 и f_2 произвољне функције назначеног аргумента.

Кад је
$$a = 1, \quad b = 2,$$
долазимо до резултата напред наведеног, тј. функција:

$$z = x f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^2 f_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

јесте општи интеграл једначине

$$z = xp + yq - \frac{1}{2!}(x^2 r + 2xys + y^2 t).$$

2. Уочимо сада релацију

$$z = x^a f_1 + x^b f_2 + x^c f_3, \tag{23}$$

где су a, b, c три различите константе, а f_1, f_2, f_3 три ма какве функције од $\frac{y}{x}$.

Из (23) излази

$$\begin{aligned} & xp + yq = a x^a f_1 + b x^b f_2 + c x^c f_3, \\ & (xp + yq)^{(2)} = a(a-1) x^a f_1 + b(b-1) x^b f_2 + c(c-1) x^c f_3, \\ & (xp + yq)^{(3)} = a(a-1)(a-2) x^a f_1 + b(b-1)(b-2) x^b f_2 + \\ & \qquad + c(c-1)(c-2) x^c f_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Ако се из релација (23) и (24) елиминишу f_1, f_2, f_3, добија се

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ xp+yq & a & b & c \\ (xp+yq)^{(2)} & a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \\ (xp+yq)^{(3)} & a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{vmatrix} = 0,$$

тј.

$$\Delta_0 z - \Delta_1\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \Delta_2\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) -$$

$$-\Delta_3\left(x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 3xy^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} + y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right),$$

где Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3 имају ове вредности:

$$\Delta_0 = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ (a-1)(a-2) & (b-1)(b-2) & (c-1)(c-2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a(a-1)(a-2) & b(b-1)(b-2) & c(c-1)(c-2) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a(a-1) & b(b-1) & c(c-1) \end{vmatrix}.$$

Горње алтернанте, у развијеном облику, претстављене су изразима

$$\Delta_0 = abc\,(b-a)(c-a)(c-b),$$

$$\Delta_1 = (b-a)(c-a)(c-b)\,[(ab+bc+ca)-(a+b+c)+1],$$

$$\Delta_2 = (b-a)(c-a)(c-b)\,[(a+b+c)-3],$$

$$\Delta_3 = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Из изложеног изводи се овај закључак:

Општи интеграл линеарне парцијалне једначине трећег реда

$$abcz = [(ab + bc + ca) - (a + b + c) + 1]\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) -$$

$$- [(a + b + c) - 3]\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ \left(x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2 y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3xy^2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)$$

дат је релацијом

$$z = x^a f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^b f_2\left(\frac{y}{x}\right) + x^c f_3\left(\frac{y}{x}\right).$$

ГЛАВА ЧЕТВРТА

VI. У претходној глави овог рада решили смо проблем:

Одредити парцијалну једначину чији је општи интеграл

$$z = \sum_{k=1}^{n} x^{a_k} f_k\left(\frac{y}{x}\right),$$

где су a_k различите константе, f_k произвољне функције назначеног аргумента.

Поставимо сада обрнути проблем:

Одредити општи интеграл парцијалне једначине

$$(xp + yq)^{(n)} + \alpha_1 (xp + yq)^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1}(xp + yq) + \alpha_n z = 0,$$

где су α_k дате константе.

Решење обрнутог проблема навели смо у Уводу овог рада. Овде ћемо проучити неке партикуларне случајеве.

1. Уочимо парцијалну једначину

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = \alpha(xp + yq) + \beta z, \tag{25}$$

где су α и β ма какве константе, и потражимо општи интеграл те једначине.

У претходној глави смо нашли да је функција

$$z = x^a f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^b f_2\left(\frac{y}{x}\right) \tag{26}$$

општи интеграл парцијалне једначине

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = (a + b - 1)(xp + yq) - abz. \tag{27}$$

Упоређењем једначине (25) и (27) долази се до релација

$$a + b = \alpha + 1,$$
$$ab = -\beta,$$

што значи да су a и b корени квадратне једначине

$$t^2 - (\alpha + 1)t - \beta = 0. \tag{28}$$

То је карактеристична једначина придружена задатој парцијалној једначини (25).

Према томе, под условом да је

$$(\alpha + 1)^2 + 4\beta \neq 0, \quad \text{тј.} \quad a \neq b,$$

општи интеграл парцијалне једначине (25) дефинисан је релацијом (26), где су a и b корени карактеристичне једначине (28).

Поставља се питање како ћемо наћи општи интеграл једначине (25) ако карактеристична једначина (28) има једнаке корене, тј. у случају ако је

$$(\alpha + 1)^2 + 4\beta = 0. \tag{29}$$

С обзиром на услов (29) уместо α и β можемо ставити

$$\alpha = 2m - 1,$$
$$\beta = -m^2,$$

где је m један параметар.

Једначина (25) тада постаје

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = (2m - 1)(xp + yq) - m^2 z. \tag{30}$$

Ако се стави

$$xp + yq = u,$$

једначина (30) је еквивалентна *Charpit*-овом систему

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = u,$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2mu - m^2 z.$$

Одговарајући систем обичних диференцијалних једначина гласи:

(31) $$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{2mu - m^2 z}.$$

Два интеграла система (31) јесу

(32) $$\frac{y}{x} = C_1,$$

(33) $$\frac{mz - u}{x^m} = C_2,$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

Да бисмо нашли још један интеграл система (31), пођимо од једначине

$$\frac{dz}{u} = \frac{du}{2mu - m^2 z}.$$

Према (33) последња једначина постаје

$$\frac{dz}{dx} - \frac{m}{x} z - C_2 x^{m-1} = 0.$$

Општи интеграл последње једначине је

(34) $$z = C_3 x^m + C_2 x^m \log x,$$

где је C_3 нова интеграциона константа.

С обзиром на (33), једначина (34) добија облик

$$\frac{z - (mz - u)\log x}{x^m} = C_3.$$

Општи интеграл *Charpit*-овог система је

$$\frac{z - (mz - u)\log x}{x^m} = f_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{mz - u}{x^m} = f_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ако се из последњих двеју релација елиминише параметар u, добија се

$$z = x^m \left[f_1\left(\frac{y}{x}\right) + f_2\left(\frac{y}{x}\right) \log x \right],$$

а то је општи интеграл једначине (25), за случај када њена карактеристична једначина има двојни корен m.

2. Посматрајмо једначину

(35) $$x^2 r + 2xys + y^2 t = n(xp + yq) - nz$$
$$(n = \text{const.}).$$

Charpit-ев систем, у овом случају, гласи

$$(36)\qquad \begin{aligned} x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} &= u \\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} &= (n+1)\,u - nz, \end{aligned}$$

одакле је

$$(37)\qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{(n+1)\,u - nz}.$$

Један интеграл система (37) је

$$\frac{y}{x} = C_1 \qquad (C_1 = \text{const.}).$$

Из система (37) може се створити интеграбилна комбинација

$$\frac{d\,(nz - u)}{nz - u} = \frac{dx}{x},$$

одакле је

$$\frac{nz - u}{x} = C_2 \qquad (C_2 = \text{const.}).$$

Исто тако, имамо и ову интеграбилну комбинацију

$$\frac{d\,(z - u)}{n\,(z - u)} = \frac{dx}{x},$$

што доводи до

$$\frac{z - u}{x^n} = C_3 \qquad (C_3 = \text{const.}).$$

Према томе, општи интеграл *Charpit*-овог система (36) је

$$(38)\qquad \begin{aligned} \frac{nz - u}{x} &= f\left(\frac{y}{x}\right), \\ \frac{z - u}{x^n} &= \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

После елиминације параметра *u* из (38) добија се

$$(39)\qquad z = x\,f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f_2\left(\frac{y}{x}\right),$$

што претставља општи интеграл задате једначине (35).

Међутим, ако искористимо резултате из претходне главе, можемо лакше доћи до истог резултата (39).

Карактеристична једначина за једначину (35) гласи

$$t^2 - (n+1)\,t + n = 0.$$

Њени корени су

$$t_1 = 1, \quad t_2 = n,$$

те се непосредно долази до резултата (39).

3. Посматрајмо сада *Bertrand*-ову парцијалну једначину[1])

$$x^2 r + 2\,x y s + y^2 t + x p + y q = n^2 z \qquad (n = \text{const}), \tag{40}$$

коју је Н. Салтиков интегралио помоћу *Charpit*-евог система у напред наведеном раду.

Карактеристична једначина за *Bertrand*-ову једначину гласи

$$t^2 - n^2 = 0,$$

одакле излази

$$t_1 = n, \quad t_2 = -n.$$

Према томе, општи интеграл једначине (40) је

$$z = x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{-n} f_2\left(\frac{y}{x}\right),$$

а то је у сагласности са познатим резултатом.

VII. Интегралимо, на крају, парцијалну једначину трећег реда

$$\left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\,x^2 y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\,x y^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + \tag{41}$$

$$+ \alpha\left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,x y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \beta\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \gamma z = 0,$$

где су α, β, γ три дате константе.

Тога ради упоредимо је са једначином

$$\left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\,x^2 y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\,x y^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) -$$

$$- \left[(a+b+c) - 3\right]\left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\,x y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ \left[(ab+bc+ca) - (a+b+c) + 1\right]\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) - abc\,z = 0,$$

коју смо раније образовали.

---

1) J. Bertrand, *Traité de Calcul différentiel*, p. 223 (Paris, 1864).

Тако се налазе релације

$$a + b + c = 3 - \alpha,$$
$$(ab + bc + ca) - (a + b + c) = \beta - 1,$$
$$abc = -\gamma$$

тј.

$$a + b + c = 3 - \alpha,$$
$$ab + bc + ca = 2 - \alpha + \beta,$$
$$abc = -\gamma.$$

Према томе, a, b, c су корени једначине

(42) $$t^3 + (\alpha - 3)\, t^2 + (\beta - \alpha + 2)\, t + \gamma = 0.$$

Једначина (42) претставља карактеристичну једначину једначине (41).

Ако су корени t_1, t_2, t_3 једначине (42) различити, општи интеграл једначине (41) дефинисан је релацијом

$$z = x^{t_1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{t_2} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + x^{t_3} f_3\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ако је

$$t_2 = t_3, \quad t_1 \neq t_2,$$

општи интеграл једначине (41) је

$$z = x^{t_1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{t_2}\left[f_2\left(\frac{y}{x}\right) + f_3\left(\frac{y}{x}\right)\log x\right].$$

У случају када је

$$t_1 = t_2 = t_3,$$

општи интеграл једначине (41) је

$$z = x^{t_1}\left[f_1\left(\frac{y}{x}\right) + f_2\left(\frac{y}{x}\right)\log x + f_3\left(\frac{y}{x}\right)\log^2 x\right].$$

Тако, на пример, једначини

$$\left(x^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3x^2y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 3xy^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} + y^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + \left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - z = 0$$

одговара карактеристична једначина

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

која има тројни корен $t = 1$.

Општи интеграл задате једначине је

$$z = x\left[f_1\left(\frac{y}{x}\right) + f_2\left(\frac{y}{x}\right)\log x + f_3\left(\frac{y}{x}\right)\log^2 x\right].$$

VIII. Напоменимо да једначини

$$(43)\qquad (xp+yq)^{(4)}+\alpha_1(xp+yq)^{(3)}+\alpha_2(xp+yq)^{(2)}+\alpha_3(xp+yq)+\alpha_4 z=0$$

$$(\alpha_k=\text{const.})$$

одговара ова карактеристична једначина

$$(44)\qquad t^4+(\alpha_1-6)t^3+(\alpha_2-3\alpha_1+11)t^2+$$
$$+(\alpha_3-\alpha_2+2\alpha_1-6)t+\alpha_4=0.$$

Партикуларни случај једначине (43) претставља једначина

$$z=(xp+yq)-\frac{1}{2!}(xp+yq)^{(2)}+\frac{1}{3!}(xp+yq)^{(3)}-\frac{1}{4!}(xp+yq)^{(4)}.$$

У овом случају је

$$(45)\qquad \alpha_1=-4,\quad \alpha_2=12,\quad \alpha_3=-24,\quad \alpha_4=24.$$

Карактеристична једначина (44) за вредности (45) постаје

$$t^4-10t^3+35t^2-50t+24=0$$

и њени су корени

$$t_1=1,\quad t_2=2,\quad t_3=3,\quad t_4=4.$$

Према томе, општи интеграл једначине (43) је

$$z=x f_1\left(\frac{y}{x}\right)+x^2 f_2\left(\frac{y}{x}\right)+x^3 f_3\left(\frac{y}{x}\right)+x^4 f_4\left(\frac{y}{x}\right).$$

ГЛАВА ПЕТА

IX. До неких резултата добијених у овом раду може се доћи краћим путем увођењем оператора

$$\psi=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y},$$

којим се често служе нарочито енглески математичари.

Тада ће бити

$$\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{(k)}=\psi(\psi-1)(\psi-2)\ldots\ldots(\psi-k+1)z.$$

Тако је, на пример,

$$(xp+yq)^{(2)}=\psi(\psi-1)z.$$

Једначини трећег реда

$$(xp+yq)^{(3)}+\alpha_1(xp+yq)^{(2)}+\alpha_2(xp+yq)+\alpha_3 z=0,$$

ако се узме у помоћ оператор ψ, одговораће карактеристична једначина

$$\psi(\psi-1)(\psi-2)+\alpha_1\psi(\psi-1)+\alpha_2\psi+\alpha_3=0,$$

тј. $$\psi^3 + (\alpha_1 - 3)\,\psi^2 + (\alpha_2 - \alpha_1 + 2)\,\psi + \alpha_3 = 0.$$

Исту карактеристичну једначину нашли смо другим путем који је био знатно дужи.

Међутим, могућност да интегралимо парцијалну једначину (I) на два потпуно разна начина има, између осталог, корист што можемо, упоређивањем резултата, доћи до вредности детерминанте облика

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_1(a_1-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1(a_1-1)\ldots(a_1-k+2) \\ a_1(a_1-1)\ldots(a_1-k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1(a_1-1)\ldots(a_1-n+1) \end{Vmatrix}$$

где смо, ради скраћивања у писању, назначили само прву колону.

Тако је, на пример,

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_1(a_1-1) \\ a_1(a_1-1)(a_1-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_1(a_1-1)(a_1-2)\ldots(a_1-n+3) \\ a_1(a_1-1)(a_1-2)\ldots(a_1-n+1) \end{Vmatrix} = P\left[\Sigma a_1 - \binom{n}{2}\right],$$

где је
$$\Sigma a_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

а *P* Vandermonde-Cauchy-ева детерминанта.

Овим ћемо се детаљније бавити у једном засебном раду.

RÉSUMÉ

Sur une équation linéaire aux dérivées partielles

Par

D. S. Mitrinovitch

Le contenu de ce travail fut résumé succinctement dans notre Note „Sur l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles" insérée dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 210, 1940, p. 783—785.

M. Jules Haag, inspiré par la Note précitée, a inséré aussi aux Comptes rendus, t. 212, 1941, p. 259—261 la Note „Sur certaines équations aux dérivées partielles" dans laquelle il a énoncé un résultat intéressant relatif à l'équation

$$H(x, y, z, z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$

avec

$$z_k = (xp + yq)^{(k)} =$$
$$= x^k \frac{\partial^k z}{\partial x^k} + \binom{k}{1} x^{k-1} y \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-1} \partial y} + \binom{k}{2} x^{k-2} y^2 \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-2} \partial y^2} + \ldots$$
$$\ldots + y^k \frac{\partial^k z}{\partial y^k}$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Notre travail se rapporte à l'équation

$$(1) \quad (xp + yq)^{(n)} + \alpha_1 (xp + yq)^{(n-1)} + \alpha_2 (xp + yq)^{(n-2)} + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{n-1} (xp + yq) + \alpha_n z = 0,$$

où α_k sont des constantes.

A l'équation (1) on peut faire correspondre une équation algébrique — équation caractéristique,

$$(2) \quad a^n + s_1 a^{n-1} + s_2 a^{n-2} + \ldots + s_{n-1} a + s_n = 0,$$

dont les coefficients $s_1, s_2, \ldots, s_n$, combinaisons linéaires en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, se forment au moyen d'un simple procédé.

Ainsi, par exemple, les équations caractéristiques, lesquelles correspondent à $n = 3$ et $n = 4$, sont respectivement:

$$a^3 + (\alpha_1 - 3) a^2 + (\alpha_2 - \alpha_1 + 2) a + \alpha_3 = 0,$$

$$a^4 + (\alpha_1 - 6) a^3 + (\alpha_2 - 3\alpha_1 + 11) a^2 + (\alpha_3 - \alpha_2 + 2\alpha_1 - 6) a + \alpha_4 = 0.$$

On démontre la proposition suivante:

1° L'intégrale générale de l'équation (1) est

$$z = \sum_{\nu=1}^{n} x^{a_\nu} f_\nu \left(\frac{y}{x}\right), \quad \left(f_\nu = \text{fonct. arbitraires de } \frac{y}{x}\right)$$

toutes les fois où toutes les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'équation (2) sont distinctes;

2° Dans le cas où $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont k racines distinctes de l'équation (2), $m_1, m_2, \ldots, m_k$ désignant leurs ordres de multiplicité respectifs

$$\left(\sum_{\nu=1}^{k} m_\nu = n\right),$$

l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$z = x^{a_1} \sum_{\nu=0}^{m_1-1} f_{1\nu} \left(\frac{y}{x}\right) (\log x)^\nu + x^{a_2} \sum_{\nu=0}^{m_2-1} f_{2\nu} \left(\frac{y}{x}\right) (\log x)^\nu + \ldots .$$

$$\ldots + x^{a_k} \sum_{\nu=0}^{m_k-1} f_{k\nu} \left(\frac{y}{x}\right) (\log x)^\nu$$

$$\left(f_{\mu\nu} = \text{fonct. arbitraires de } \frac{y}{x}\right).$$

Relativement à l'équation

$$(3) \quad z = (xp + yq) - \frac{1}{2!}(xp + yq)^{(2)} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}(yp + yq)^{(n)},$$

présentant évidemment un cas particulier de l'équation (1), on énonce la proposition suivante:

1° L'intégrale générale de l'équation (3) est

$$z = x f_1 \left(\frac{y}{x}\right) + x^2 f_2 \left(\frac{y}{x}\right) + \ldots + x^n f_n \left(\frac{y}{x}\right);$$

2° L'intégrale complète de l'équation (3) s'obtient en y remplaçant les dérivées par des constantes arbitraires[1]).

---

[1]) Par conséquent, l'équation (3) jouit de la propriété de l'équation de Clairaut.

Exemple. L'équation

$$(4) \quad z=(x p+y q)-\frac{1}{2!}(x p+y q)^{(2)}+\frac{1}{3!}(x p+y q)^{(3)}-\frac{1}{4!}(x p+y q)^{(4)}$$

laquelle est une forme abrégée de l'équation

$$z=\left(x \frac{\partial z}{\partial x}+y \frac{\partial z}{\partial y}\right)-$$

$$-\frac{1}{2!}\left(x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2 x y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+3 x^2 y \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}+3 x y^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}+y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)-$$

$$-\frac{1}{4!}\left(x^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+4 x^3 y \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}+6 x^2 y^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}+4 x y^3 \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3}+y^4 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)$$

admet comme intégrale générale

$$z=x f_1\left(\frac{y}{x}\right)+x^2 f_2\left(\frac{y}{x}\right)+x^3 f_3\left(\frac{y}{x}\right)+x^4 f_4\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left(f_\nu = \text{fonct. arbitraires de } \frac{y}{x}\right).$$

L'intégrale complète de l'équation (4) est

$$\begin{aligned} z = {} & C_{10} x + C_{01} y + \\ & + C_{20} x^2 + C_{11} x y + C_{02} y^2 + \\ & + C_{30} x^3 + C_{21} x_2 y + C_{12} x y^2 + C_{03} y^3 + \\ & + C_{40} x^4 + C_{31} x^3 y + C_{22} x^2 y^2 + C_{13} x y^3 + C_{04} y_4 \end{aligned}$$

avec $C_{mn} = \text{const.}$

Remarque. Des résultats énoncés plus haut peuvent être généralisés à des équations linéaires aux dérivées partielles, de la forme en question, avec la fonction inconnue z dépendant de plusieurs variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \quad (m \geq 3).$$

Ainsi, par exemple, l'équation

$$z=\left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}+x_3 \frac{\partial z}{\partial x_3}\right)$$

$$-\frac{1}{2!}\left(x_1^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+x_2^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+x_3^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+2 x_2 x_3 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3}+2 x_3 x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_1}+2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$$

admet comme intégrale complète

$$\begin{aligned} z = {} & C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + \\ & + C_4 x_1^2 + C_5 x_2^2 + C_6 x_3^2 + C_7 x_2 x_3 + C_8 x_3 x_1 + C_9 x_1 x_2 \end{aligned}$$

avec $C_k = \text{const} \quad (k = 1, 2, \ldots, 9).$