O JEDNOM PIZA-OVOM PROBLEMU

KOVINA MILOŠEVIĆ

P. A. Pizâ[1] je zadao problem da se pokaže da je zbir

$$S_{p+1}(n, k) = S_p(1, k) + S_p(2, k) + \cdots + S_p(n, k), \tag{1}$$

gde je

$$S_1(n, k) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad (n \text{ i } k \text{ pozitivni celi brojevi}),$$

polinom po n stepena $p+k$ i da se odredi oblik ovog polinoma.

Traženi oblik polinoma može se odrediti ako se pođe od relacije

$$S_p(n, k) = \binom{n+p-2}{p-1} 1^k + \binom{n+p-3}{p-1} 2^k + \binom{n+p-4}{p-1} 3^k + \cdots + \binom{p-1}{p-1} n^k, \tag{2}$$

koja je tačna za $p = 1, 2, 3$. Pretpostavićemo sada da je ona tačna i za $p = m$, tj.

$$S_m(n, k) = \binom{n+m-2}{m-1} 1^k + \binom{n+m-3}{m-1} 2^k + \binom{n+m-4}{m-1} 3^k + \cdots + \binom{m-1}{m-1} n^k. \tag{3}$$

Koristeći se relacijom

$$S_{m+1}(n, k) = S_m(1, k) + S_m(2, k) + \cdots + S_m(n, k),$$

kojom je definisan zbir $S_{m+1}(n, k)$ i relacijom (3), dokazaćemo da je formula (2) ispunjena i za $p = m+1$.

---

[1]) *American Mathematical Monthly*, Vol. 57, 1950, p. 119, Advanced problem № 4380.

Dakle,

$$S_{m+1}(n,k)=\binom{m-1}{m-1}1^k$$

$$+\binom{m}{m-1}1^k+\binom{m-1}{m-1}2^k$$

$$+\binom{m+1}{m-1}1^k+\binom{m}{m-1}2^k+\binom{m-1}{m-1}3^k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\binom{n+m-2}{m-1}1^k+\binom{n+m-3}{m-1}2^k+\cdots+\binom{m-1}{m-1}n^k.$$

Prema poznatoj formuli iz kombinatorike

$$\binom{n+m-1}{m}=\binom{n+m-2}{m-1}+\binom{n+m-3}{m-1}+\cdots+\binom{m-1}{m-1},$$

možemo zbir $S_{m+1}(n,k)$ napisati u ovom obliku

$$S_{m+1}(n,k)=\binom{n+m-1}{m}1^k+\binom{n+m-2}{m}2^k \tag{4}$$

$$+\binom{n+m-3}{m}3^k+\cdots+\binom{m}{m}n^k.$$

Očigledno je da se formula (4) dobija iz formule (2) za $p=m+1$. Prema tome, možemo zakjučiti da je formula (2) tačna za sve vrednosti p.

Formuli (2) možemo dati i drugi oblik koristeći rezultate koje smo izneli u raspravi *O zbiru jednog reda sa konačnim brojem članova*[2]:

Neka je dato s aritmetičkih progresija

$$a_r,\ a_r+\alpha_r,\ a_r+2\alpha_r,\ \cdots,\ a_r+(n-1)\alpha_r$$

$$(r=1,\ 2,\ \cdots,\ s).$$

---

[2]) Kovina Milošević, *O zbiru jednog reda sa konačnim brojem članova.* (Posebni izdanija na Filozofskiot fakultet, Skopje, № 3, 1950, str. 1—42).

Videti takođe:

Kovina Milošević, O *jednoj formuli iz teorije redova.* (Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, t. II № 1—2, 1950, str. 69).

Zbir proizvoda odgovarajućih članova ovih progresija

$$\prod_{r=1}^{s} a_r + \prod_{r=1}^{s} (a_r + \alpha_r) + \prod_{r=1}^{s} (a_r + 2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^{s} (a_r + \overline{n-1}\,\alpha_r)$$

može se napisati u obliku

$$(5) \qquad \sum_{q=1}^{s+1} n^{s-q+2} \sum_{j=0}^{q-1} \frac{B_{q-j-1}}{q-j-1} \binom{s-j}{q-j-1} H_s^{s-j},$$

gde smo upotrebili, radi kratkoće u pisanju, oznaku

$$\binom{s}{-1} = \frac{1}{s+1},$$

pri čemu B_m označavaju Bernoulli-eve brojeve, definisane simboličkom formulom

$$(1+B)^m - B_m = 0.$$

Izrazi H_s^t $(t = 0, 1, 2, \cdots, s)$ su polinomi definisani identitetom

$$\prod_{v=1}^{s} (a_v + x\alpha_v) = \sum_{t=0}^{s} H_s^t x^t.$$

Lako je videti da izraz $(p-1)!\, S_p(n, k)$ takođe pretstavlja jedan zbir proizvoda odgovarajućih članova $(p+k-1)$ aritmetičkih progresija. Prema tome, ovaj zbir možemo napisati u obliku formule (5), kada u njoj izvršimo odgovarajuću smenu:

$$s = p + k - 1,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 1, \quad a_{k+1} = n + p - 2, \quad a_{k+2} = n + p - 3, \cdots, a_{p+k-1} = n$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 1, \quad \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \cdots = \alpha_{p+k-1} = -1.$$

Tako dobijamo formulu

$$(p-1)!\ S_p(n,k)=\sum_{q=1}^{p+k} n^{p+k-q+1}\sum_{j=0}^{q-1}\frac{B_{q-j-1}}{q-j-1}\binom{p+k-j-1}{q-j-2}H_{p+k-1}^{p+k-j-1},$$

iz koje vidimo da je polinom $S_p(n,k)$ stepena $p+k$ po n.

Résumé

SUR UN PROBLEME DE PIZA

Par

KOVINA MILOŠEVIĆ

P. A. Pizâ[1] a proposé le problème suivant:

Montrer que la somme

$$S_{p+1}(n,k)=S_p(1,k)+S_p(2,k)+\cdots+S_p(n,k),$$

où

$$S_1(n,k)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,\quad (n \text{ et } k \text{ deux entiers positifs})$$

est un polynome du degré $p+k$ par rapport à n et déterminer la forme de ce polynome.

En employant la méthode d'induction complète, nous avons montré que la formule (1) s'écrit sous la forme

$$(2)\qquad S_p(n,k)=\binom{n+p-2}{p-1}1^k+\binom{n+p-3}{p-1}2^k+\binom{n+p-4}{p-1}3^k+\cdots$$
$$\cdots+\binom{p-1}{p-1}n^k,$$

ou, en appliquant des résultats d'une notre Note antérieure[2], la

---

[1] *American Mathematical Monthly*, Vol. 57, 1950, p. 119, Advanced problem № 4380.

[2] Kovina Milošević, *Sur la somme d'une série* (Éditions spéciales de la Faculté de philosophie, Skopje, livre 3, 1950, p. 1—42).
Voir aussi
Kovina Milošević, *Sur une formule sommatoire* (Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, t. II, № 1—2, 1950, p. 69).

somme (2) peut être mise sous la forme d'un polynome par rapport à n, que voici

$$(3)\quad (p-1)!\, S_p(n,k) = \sum_{q=1}^{p+k} n^{p+k-q+1} \sum_{j=0}^{q-1} \frac{B_{q-j-1}}{q-j-1} \binom{p+k-j-1}{q-j-1} H_{p+k-1}^{p+k-j-1}.$$

Dans la dernière formule nous avons posé, pour abréger

$$\binom{s}{-1} = \frac{1}{s+1},$$

les B_m désignant des nombres de Bernoulli définis symboliquement par

$$(1+B)^m - B_m = 0.$$

Les expressions H_s^t sont les polynomes déterminés par l'identité

$$\prod_{v=1}^{s} (a_v + x\alpha_v) = \sum_{t=0}^{s} H_s^t\, x^t.$$

Grâce à la formule (3), il est évident que la somme $S_p(n,k)$ présente un polynome du degré $p+k$ par rapport à n.