ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ НА УНИВЕРЗИТЕТОТ, СКОПЈЕ
FACULTÉ DE PHILOSOPHIE DE L'UNIVERSITÉ DE SKOPJE
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ОДДЕЛ
SECTION DES SCIENCES NATURELLES
ПОСЕБНИ ИЗДАНИЈА, КНИГА 3 * ÉDITIONS SPÉCIALES, LIVRE 3

КОВИНА МИЛОШЕВИЋ

О збиру једног реда са коначним бројем чланова

СКОПЈЕ — SKOPJE
1950

Т и р а ж 600 п р и м е р а к а

Печатница на Филозофскиот факултет — Скопје

О ЗБИРУ ЈЕДНОГ РЕДА
СА КОНАЧНИМ БРОЈЕМ ЧЛАНОВА

од

КОВИНЕ МИЛОШЕВИЋ

1. Предмет овог рада је извођење формуле за изналажење збира реда са коначним бројем чланова

$$(1)\quad \prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r + \alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r + 2\alpha_r) + \cdots\cdots + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r + (n-1)\alpha_r],$$

где су: n и p цели позитивни бројеви, a_r и α_r ма какве константе.

Збирови

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + n^p,$$

$$a^p + (a+d)^p + (a+2\,d)^p + \cdots\cdots\cdots + [a+(n-1)\,d]^p,$$

$$\{(a+b)\,(a+2\,b)\,(a+3\,b)\cdots\cdot(a+p\,b)\}$$

$$+\ \{(a+2\,b)\,(a+3b)\,(a+4\,b)\cdots\cdot[a+(p+1)\,b]\}$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\ \{(a+n\,b)\,[a+(n+1)\,b]\,[a+(n+2)\,b]\cdots\cdots[a+(n+p-1)\,b]\},$$

о којима постоји богата математичка литература[1]), јављају

[1]) Видети на пример:

J. Карамата, Теорија и пракса Stieltjes-ова интеграла, Београд 1949, стр. 312.

N. Nörlund, Sur la somme d'une fonction (Mémorial des sciences mathématiques, Paris, fasc.№ 24, 1927, p. 4).

P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, Leipzig, 1910, Bd. II, S. 28.

L. Crosland, Upper School Algebra, London, 1940, p. 215.

се као партикуларни случајеви наших формула, што ћемо такође у овом раду показати.

Као примена наших формула израђена је, за специјалне вредности констаната a_r, α_r и p, таблица збирова (1) и приложене су две табеле које су послужиле за теориско извођење формула за збир (1). Те табеле могу такође врло корисно да послуже за практично израчунавање поменутих збирова.

I.

2. Посматрајмо p аритметичких прогресија

$$a_r,\ a_r+\alpha_r,\ a_r+2\,\alpha_r,\ \cdots\cdots,\ a_r+(n-1)\,\alpha_r$$

$$(r=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ p),$$

где су: n и $p \geqslant 2$ два цела позитивна броја, a_r и α_r ма какве константе.

Формираћемо израз

$$\prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p}(a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p}(a_r+2\alpha_r) + \cdots\cdots + \prod_{r=1}^{r=p}[a_r+(n-1)\alpha_r]$$

и потражити збир тог израза са коначним бројем чланова.

Д. Митриновић[1]) даје поступак за израчунавање збира (1), који се састоји у следећем:

Ако са $f(n)$ означимо израз (1), тада постоји идентитет

$$f(n+1)-f(n)=\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+n\alpha_r). \tag{2}$$

$f(n)$ је полином по n, степена $(p+1)$, дакле облика[2]):

$$f(n)=A_1^p\ n^{p+1}+A_2^p\,n^p+\cdots\cdots+A_{p+1}^p n+A_{p+2}^p. \tag{3}$$

Идентитет (2) доводи до овог система линеарних једначина:

---

[1]) О Stirling-овим бројевима, Годишен зборник на Филозофскиот факултет на Универзитетот, Природно-математички оддел, Скопје, књ. 1, 1948, стр. 49—95. Видети нарочито главу I.

[2]) A_ν^p су изрази независни од n. Овде p означава индекс, а не експонент.

$$
\binom{p+1}{1}A_1^p = \prod \alpha_r,
$$

$$
\binom{p+1}{2}A_1^p + \binom{p}{1}A_2^p = \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1},
$$

$$
\binom{p+1}{3}A_1^p + \binom{p}{2}A_2^p + \binom{p-1}{1}A_3^p = \prod \alpha_r . \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2},
$$

$$
\binom{p+1}{4}A_1^p + \binom{p}{3}A_2^p + \binom{p-1}{2}A_3^p
$$

$$
+ \binom{p-2}{1}A_4^p = \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdot \frac{a_3}{\alpha_3},
$$

(4) . . . .

$$
\binom{p+1}{k}A_1^p + \binom{p}{k-1}A_2^p + \binom{p-1}{k-2}A_3^p + \binom{p-2}{k-3}A_4^p + \cdots
$$

$$
\cdots + \binom{p-k+2}{1}A_k^p = \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdot \ldots \ldots \cdot \frac{a_{k-1}}{\alpha_{k-1}},
$$

. . . .

$$
A_1^p + A_2^p + A_3^p + \cdots\cdots + A_p^p + A_{p+1}^p = \prod a_r \cdot
$$

У систему једначина (4) употребљене су, ради краткоће у писању, следеће ознаке:

$$
\prod \alpha_r = \prod_{r=1}^{r=p} \alpha_r \quad , \quad \prod a_r = \prod_{r=1}^{r=p} a_r ,
$$

$$
\sum \frac{a_1}{\alpha_1} = \frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{a_2}{\alpha_2} + \cdots\cdots + \frac{a_p}{\alpha_p},
$$

$$
\sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} = \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} + \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_3}{\alpha_3} + \cdots\cdots + \frac{a_{p-1}}{\alpha_{p-1}} \cdot \frac{a_p}{\alpha_p},
$$

. . . .

$\sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{a_k}{\alpha_k} =$ збиру производа израза

$$\frac{a_1}{\alpha_1}, \frac{a_2}{\alpha_2}, \; . \; . \; . \; . \; . \; , \frac{a_p}{\alpha_p}$$

узетих k по k $(k \leqq p)$.

Из релације (3) излази

$$f\,(1) = A_1^p + A_2^p + A_3^p + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + A_{p+1}^p + A_{p+2}^p ,$$

или према (1)

$$A_1^p + A_2^p + A_3^p + \cdot \cdot \cdot + A_{p+1}^p + A_{p+2}^p = \prod a_r \,.$$

Упоређењем ове релације са последњом од наведених у систему (4), добија се

$$A_{p+2}^p = 0,$$

што значи да је полином $f\,(n)$ дељив са n.

Систем (4) од $(p+1)$ једначина првога степена са $(p+1)$ непознатих

(5) $$A_1^p, A_2^p, A_3^p, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , A_{p+1}^p$$

има јединствен скуп решења, пошто је детерминанта тог система

$$(p+1)!\,,$$

тј. вредност која је увек различита од нуле, јер је према претпоставци

$$p \geqslant 2.$$

Коефицијенти полинома (3)

$$A_1^p, A_2^p, A_3^p, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , A_{p+1}^p$$

јесу линеарне комбинације израза:

$$(6)\qquad \prod\alpha_r,\ \prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1},\ \prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2},\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots,\prod\alpha_r\cdot\sum\frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdots\frac{a_k}{\alpha_k},\ldots\ldots,\prod a_r;$$

стога се систем (4) може написати и на следећи начин:

$$A_1^p = \lambda_{11} H_p^p,$$

$$A_2^p = \lambda_{21} H_p^p + \lambda_{22} H_p^{p-1},$$

$$A_3^p = \lambda_{31} H_p^p + \lambda_{32} H_p^{p-1} + \lambda_{33} H_p^{p-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(7)\qquad A_k^p = \lambda_{k1} H_p^p + \lambda_{k2} H_p^{p-1} + \lambda_{k3} H_p^{p-2} + \cdots\cdots + \lambda_{kk} H_p^{p-k+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{p+1}^p = \lambda_{p+1,1} H_p^p + \lambda_{p+1,2} H_p^{p-1} + \lambda_{p+1,3} H_p^{p-2} + \cdots + \lambda_{p+1,\,p+1} H_p^0,$$

где су $\lambda_{\mu\nu}$ нумеричке константе које треба одредити, а H_p^q $(q = 0, 1, 2, \ldots, p)$ Митриновићеви полиноми који се практички добијају на следећи начин:

Формирају се комбинације без понављања класе q од p елемената

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_p$$

и комбинације класе $(p-q)$ од p елемената

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_p.$$

Комбинација и од једних и од других елемената биће подједнак број, јер је

$$\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}.$$

Затим се посматрају две такве комбинације, једна од елемената α_r, друга од елемената a_r, тако да се у њима сваки од индекса

$$1, 2, 3, \ldots\ldots, p$$

појављује само једанпут. За такве две комбинације каже се да су кореспондентне.

Митриновићев полином H_p^q једнак је збиру производа кореспондентних комбинација.

II.

3. Полазећи од наведених резултата Д. Митриновића може се доћи до опште формуле за збир (1), као и до неких других закључака.

Збир (1) написаћемо у следећем облику

$$\prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r+2\,\alpha_r) + \ldots + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r+(n-1)\alpha_r] \tag{8}$$

$$= A_1^p\, n^{p+1} + A_2^p\, n^p + \ldots + A_{p+1}^p\, n\,.$$

Коефицијенти

$$A_1^p, A_2^p, A_3^p, \ldots\ldots, A_{p+1}^p$$

могу се израчунати на следећи начин:

Из прве од једначина система (4) израчунава се A_1^p, из друге A_2^p и уопште из k-те једначине A_k^p.

На тај начин добијају се формуле:

$$
\begin{aligned}
A_1^p &= \frac{1}{p+1} H_p^p, \\
A_2^p &= -\frac{1}{2} H_p^p + \frac{1}{p} H_p^{p-1}, \\
A_3^p &= \frac{1}{12}\binom{p}{1} H_p^p - \frac{1}{2} H_p^{p-1} + \frac{1}{p-1} H_p^{p-2}, \\
A_4^p &= \frac{1}{12}\binom{p-1}{1} H_p^{p-1} - \frac{1}{2} H_p^{p-2} + \frac{1}{p-2} H_p^{p-3}, \\
(9)\quad A_5^p &= -\frac{1}{120}\binom{p}{3} H_p^p + \frac{1}{12}\binom{p-2}{1} H_p^{p-2} \\
&\qquad - \frac{1}{2} H_p^{p-3} + \frac{1}{p-3} H_p^{p-4}, \\
A_6^p &= -\frac{1}{120}\binom{p-1}{3} H_p^{p-1} + \frac{1}{12}\binom{p-3}{1} H_p^{p-3} \\
&\qquad - \frac{1}{2} H_p^{p-4} + \frac{1}{p-4} H_p^{p-5}, \\
A_7^p &= \frac{1}{252}\binom{p}{5} H_p^p - \frac{1}{120}\binom{p-2}{3} H_p^{p-2} + \frac{1}{12}\binom{p-4}{1} H_p^{p-4} \\
&\qquad - \frac{1}{2} H_p^{p-5} + \frac{1}{p-5} H_p^{p-6}, \\
A_8^p &= \frac{1}{252}\binom{p-1}{5} H_p^{p-1} - \frac{1}{120}\binom{p-3}{3} H_p^{p-3} \\
&\qquad + \frac{1}{12}\binom{p-5}{1} H_p^{p-5} - \frac{1}{2} H_p^{p-6} + \frac{1}{p-6} H_p^{p-7}, \\
A_9^p &= -\frac{1}{240}\binom{p}{7} H_p^p + \frac{1}{252}\binom{p-2}{5} H_p^{p-2} - \frac{1}{120}\binom{p-4}{3} H_p^{p-4} \\
&\qquad + \frac{1}{12}\binom{p-6}{1} H_p^{p-6} - \frac{1}{2} H_p^{p-7} + \frac{1}{p-7} H_p^{p-8}, \\
A_{10}^p &= -\frac{1}{240}\binom{p-1}{7} H_p^{p-1} + \frac{1}{252}\binom{p-3}{5} H_p^{p-3} \\
&\qquad - \frac{1}{120}\binom{p-5}{3} H_p^{p-5} + \frac{1}{12}\binom{p-7}{1} H_p^{p-7} - \frac{1}{2} H_p^{p-8} + \frac{1}{p-9} H_p^{p-9}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

пошто су претходно изрази (6) замењени одговарајућим вредностима Митриновићевих полинома.

Из система (4), (7) и (9) добијамо систем једначина који нам омогућава израчунавање коефицијената

$$\lambda_{\mu 1}\ (\mu = 1, 2, 3, \ldots, p+1)$$

$$\binom{p+1}{1}\lambda_{11} = 1\,,$$

$$\binom{p}{1}\lambda_{21} + \binom{p+1}{2}\lambda_{11} = 0\,,$$

$$\binom{p-1}{1}\lambda_{31} + \binom{p}{2}\lambda_{21} + \binom{p+1}{3}\lambda_{11} = 0\,,$$

$$(\lambda_{\mu 1})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{p-\mu+2}{1}\lambda_{\mu 1} + \binom{p-\mu+3}{2}\lambda_{\mu-1,1} + \binom{p-\mu+4}{3}\lambda_{\mu-2,1} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{p}{\mu-1}\lambda_{21} + \binom{p+1}{\mu}\lambda_{11} = 0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{p+1,1} + \lambda_{p 1} + \lambda_{p-1,1} + \ldots\ldots + \lambda_{21} + \lambda_{11} = 0\,.$$

Систем једначина из кога се израчунавају коефицијенти $\lambda_{\mu 2}$ био би:

$$\binom{p}{1}\lambda_{22} = 1\,,$$

$$\binom{p-1}{1}\lambda_{32} + \binom{p}{2}\lambda_{22} = 0\,,$$

$$\binom{p-2}{1}\lambda_{42} + \binom{p-1}{2}\lambda_{32} + \binom{p}{3}\lambda_{22} = 0\,,$$

$$(\lambda_{\mu 2})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{p-\mu+2}{1}\lambda_{\mu 2} + \binom{p-\mu+3}{2}\lambda_{\mu-1,2} + \binom{p-\mu+4}{3}\lambda_{\mu-2,2} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{p-1}{\mu-2}\lambda_{32} + \binom{p}{\mu-1}\lambda_{22} = 0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{p+1,2} + \lambda_{p 2} + \lambda_{p-1,2} + \ldots\ldots + \lambda_{32} + \lambda_{22} = 0\,.$$

На сличан начин добијају се системи линеарних једначина помоћу којих израчунавамо коефицијенте

$$\lambda_{\mu 3}, \; \lambda_{\mu 4}, \; \lambda_{\mu 5}, \; \ldots\ldots, \lambda_{\mu\nu}$$

где су

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots\ldots, p+1,$$

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots, p+1.$$

Може се лако показати, методом потпуне индукције, да ће у општем случају за одређивање коефицијената $\lambda_{\mu\nu}$ важити систем линеарних једначина:

$$\binom{p-\nu+2}{1}\lambda_{\nu\nu} = 1,$$

$$\binom{p-\nu+1}{1}\lambda_{\nu+1,\nu} + \binom{p-\nu+2}{2}\lambda_{\nu\nu} = 0,$$

$$\binom{p-\nu}{1}\lambda_{\nu+2,\nu} + \binom{p-\nu+1}{2}\lambda_{\nu+1,\nu} + \binom{p-\nu+2}{3}\lambda_{\nu\nu} = 0,$$

$$\binom{p-\nu-1}{1}\lambda_{\nu+3,\nu} + \binom{p-\nu}{2}\lambda_{\nu+2,\nu} + \binom{p-\nu+1}{3}\lambda_{\nu+1,\nu} + \binom{p-\nu+2}{4}\lambda_{\nu\nu} = 0,$$

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\binom{p-\mu+2}{1}\lambda_{\mu\nu} + \binom{p-\mu+3}{2}\lambda_{\mu-1,\nu} + \binom{p-\mu+4}{3}\lambda_{\mu-2,\nu} + \ldots \ldots + \binom{p-\nu+2}{\mu-\nu+1}\lambda_{\nu\nu} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{p+1,\nu} + \lambda_{p\nu} + \lambda_{p-1,\nu} + \ldots\ldots + \lambda_{\nu\nu} = 0.$$

Да бисмо израчунали $\lambda_{\mu\nu}$ неопходно је потребно израчунати $\lambda_{\mu-1,\nu}$, а то значи да претходно треба израчунати коефицијенте $\lambda_{\nu\nu}, \lambda_{\nu+1,\nu}, \ldots \lambda_{\mu-2,\nu}, \lambda_{\mu-1,\nu}$.

Непознате коефицијенте из формула (6) одређујемо на следећи начин:

Најпре израчунавамо из система (10) коефицијенте $\lambda_{\mu 1}$ када у њему ставимо редом вредности $\nu = 1$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots, p+1$. Затим коефицијенте $\lambda_{\mu 2}$, такође помоћу система (10) стављајући у њему вредности $\nu = 2$, $\mu = 2, 3, 4, \ldots$ и тако редом даље.

Овај начин одређивања збира реда (1) илустроваћемо следећим примером.

Нека је $p = 3$, тада је

$$f(n) = A_1^3 n^4 + A_2^3 n^3 + A_3^3 n^2 + A_4^3 n$$

или

$$\prod_{r=1}^{r=3} a_r + \prod_{r=1}^{r=3} (a_r + \alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=3} (a_r + 2\alpha_r) + \ldots + \prod_{r=1}^{r=3} [a_r + (n-1)\alpha_r] \tag{11}$$

$$= n\left(A_1^3 n^3 + A_2^3 n^2 + A_3^3 n + A_4^3\right).$$

Коефицијенти $A_1^3, A_2^3, A_3^3, A_4^3$ дефинисани су следећим формулама:

$$A_1^3 = \lambda_{11} H_3^3,$$

$$A_2^3 = \lambda_{21} H_3^3 + \lambda_{22} H_3^2,$$

$$A_3^3 = \lambda_{31} H_3^3 + \lambda_{32} H_3^2 + \lambda_{33} H_3^1,$$

$$A_4^3 = \lambda_{41} H_3^3 + \lambda_{42} H_3^2 + \lambda_{43} H_3^1 + \lambda_{44} H_3^0.$$

Из система ($\lambda_{\eta 1}$) одређујемо коефицијенте $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{41}$, из система ($\lambda_{\eta 2}$) одређујемо коефицијенте $\lambda_{22}, \lambda_{32}, \lambda_{42}$ итд. Тако добијамо да је

$$A_1^3 = \frac{1}{4} H_3^3,$$

$$A_2^3 = -\frac{1}{2} H_3^3 + \frac{1}{3} H_3^2,$$

$$A_3^3 = \frac{1}{4} H_3^3 - \frac{1}{2} H_3^2 + \frac{1}{2} H_3^1,$$

$$A_4^3 = \frac{1}{6} H_3^2 - \frac{1}{2} H_3^1 + H_3^0.$$

Митриновићеви полиноми за овај специјалан случај постају

$$H_3^3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ,$$

$$H_3^2 = \alpha_1 \alpha_2 a_3 + \alpha_2 \alpha_3 a_1 + \alpha_3 \alpha_1 a_2 ,$$

$$H_3^1 = \alpha_1 a_2 a_3 + \alpha_2 a_3 a_1 + \alpha_3 a_1 a_2 ,$$

$$H_3^0 = a_1 a_2 a_3 .$$

4. Коефицијенте $\lambda_{\eta\nu}$ можемо одредити и на други начин. Табела I у којој смо исписали коефицијенте $\lambda_{\eta\nu}$ из формула (9) може нам послужити, ради своје прегледности, за одређивање релација између коефицијената у појединим колонама и дијагоналама.

Тако добијамо формуле:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{k,k} = \frac{1}{p-k+2} ,\\
&\lambda_{k,k-1} = \lambda_{21} ,\\
&\lambda_{k,k-2} = \frac{\binom{p-k+3}{1}}{\binom{p}{1}} \lambda_{31} ,\\
(12)\qquad &\lambda_{k,k-3} = 0 ,\\
&\lambda_{k,k-4} = \frac{\binom{p-k+5}{3}}{\binom{p}{3}} \lambda_{51} ,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

и уопште је

$$\lambda_{k,k-l} = \frac{\binom{p-k+l+1}{l-1}}{\binom{p}{l-1}} \lambda_{l+1,1} ,$$

$$\lambda_{k,m} = 0, \text{ за } k-m = 2r+1; \ r = 1, 2, 3, \dots .$$

Помоћу система линеарних једначина (λ_{η_1}), из кога израчунавамо коефицијенте

$$\lambda_{11}, \lambda_{21}, \lambda_{31}, \ldots, \lambda_{\eta_1}$$

и формула (12) у могућности смо да одредимо све непознате коефицијенте $\lambda_{\eta\nu}$.

Овај начин одређивања коефицијената $\lambda_{\eta\nu}$ много је практичнији од претходног, стога ћемо га приказати на једном примеру.

Нека је $p = 4$, тада постоји идентитет

$$(13)\quad \prod_{r=1}^{r=4} a_r + \prod_{r=1}^{r=4} (a_r + \alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=4} (a_r + 2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^{r=4} [a_r + (n-1)\alpha_r]$$

$$= n\left(\overset{4}{A_1} n^4 + \overset{4}{A_2} n^3 + \overset{4}{A_3} n^2 + \overset{4}{A_4} n + \overset{4}{A_5}\right),$$

где су коефицијенти $\overset{4}{A_1}, \overset{4}{A_2}, \overset{4}{A_3}, \overset{4}{A_4}, \overset{4}{A_5}$ дефинисани формулама:

$$\begin{aligned}
&\overset{4}{A_1} = \lambda_{11} \overset{4}{H_4},\\
&\overset{4}{A_2} = \lambda_{21} \overset{4}{H_4} + \lambda_{22} \overset{3}{H_4},\\
(14)\qquad &\overset{4}{A_3} = \lambda_{31} \overset{4}{H_4} + \lambda_{32} \overset{3}{H_4} + \lambda_{33} \overset{2}{H_4},\\
&\overset{4}{A_4} = \lambda_{41} \overset{4}{H_4} + \lambda_{42} \overset{3}{H_4} + \lambda_{43} \overset{2}{H_4} + \lambda_{44} \overset{1}{H_4},\\
&\overset{4}{A_5} = \lambda_{51} \overset{4}{H_4} + \lambda_{52} \overset{3}{H_4} + \lambda_{53} \overset{2}{H_4} + \lambda_{54} \overset{1}{H_4} + \lambda_{55} \overset{0}{H_4}.
\end{aligned}$$

λ_{η_1} ($\eta = 1, 2, 3, 4, 5$) одређујемо из система (λ_{η_1}) и добијамо следеће вредности

$$\lambda_{11} = \frac{1}{5}, \lambda_{21} = -\frac{1}{2}, \lambda_{31} = \frac{1}{3}, \lambda_{41} = 0, \lambda_{51} = -\frac{1}{30}.$$

Остале коефицијенте λ_{η_2} ($\eta = 2, 3, 4, 5$), λ_{η_3} ($\eta = 3,4,5$), λ_{η_4} ($\eta = 4, 5$) и λ_{55} одређујемо директно помоћу формула (12).

Добијене вредности за коефицијенте $\lambda_{\eta\nu}$ ($\eta = 1, 2, 3, 4, 5$; $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$) замењујемо у систем (14) те имамо:

$$A_1^4 = \frac{1}{5} H_4^4,$$

$$A_2^4 = -\frac{1}{2} H_4^4 + \frac{1}{4} H_4^3,$$

$$A_3^4 = \frac{1}{3} H_4^4 - \frac{1}{2} H_4^3 + \frac{1}{3} H_4^2,$$

$$A_4^4 = \frac{1}{4} H_4^3 - \frac{1}{2} H_4^2 + \frac{1}{2} H_4^1,$$

$$A_5^4 = -\frac{1}{30} H_4^4 + \frac{1}{6} H_4^2 - \frac{1}{2} H_4^1 + H_4^0,$$

где је

$$H_4^4 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4,$$

$$H_4^3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 a_4 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 a_3 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 a_2 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 a_1,$$

$$H_4^2 = \alpha_1 \alpha_2 a_3 a_4 + \alpha_1 \alpha_3 a_2 a_4 + \alpha_1 \alpha_4 a_2 a_3 + \alpha_2 \alpha_3 a_1 a_4 + \alpha_2 \alpha_4 a_1 a_3 + \alpha_3 \alpha_4 a_1 a_2,$$

$$H_4^1 = \alpha_1 a_2 a_3 a_4 + \alpha_2 a_1 a_3 a_4 + \alpha_3 a_1 a_2 a_4 + \alpha_4 a_1 a_2 a_3,$$

$$H_4^0 = a_1 a_2 a_3 a_4.$$

Добијени резултат је у складу са оним који је навео Д. Митриновић на стр. 59 поменуте расправе.

5. Табелу I можемо написати и у другом облику (видети приложену табелу II). Помоћу ње добијамо следећу формулу за коефицијенат A_k^p:

$$A_k^p = C_k \binom{p}{k-2} H_p^p + C_{k-1} \binom{p-1}{k-3} H_p^{p-1} + C_{k-2} \binom{p-2}{k-4} H_p^{p-2} + \cdots + C_1 \binom{p-k+1}{-1} H_p^{p-k+1}. \tag{15}$$

Формули (15) можемо дати скраћени облик:

$$A_k^p = \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-j} \binom{p-j}{k-2-j} H_p^{p-j}. \tag{16}$$

Ради задржавања симетрије у писању уводимо ознаку

$$\binom{s}{-1} = \frac{1}{s+1}.$$

На основу формуле (16) збир реда (1) изразићемо општом формулом

$$(17)\quad \prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r + \alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r + 2\alpha_r) + \cdots + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r + (n\text{-}1)\alpha_r]$$

$$= n^{p+1} C_1 \binom{p}{-1} H_p^p + n^p \sum_{j=0}^{1} C_{2-j} \binom{p-j}{-j} H_p^{p-j}$$

$$+ n^{p-1} \sum_{j=0}^{2} C_{3-j} \binom{p-j}{1-j} H_p^{p-j}$$

$$+ \cdots + n^{p-k+2} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-j} \binom{p-j}{k-2-j} H_p^{p-j}$$

$$+ \cdots + n \sum_{j=0}^{p} C_{p+1-j} \binom{p-j}{p-1-j} H_p^{p-j}.$$

Крајња формула за збир реда (1) биће облика

$$(18)\quad \sum_{m=0}^{n-1} \prod_{r=1}^{p} (a_r + m\alpha_r) = \sum_{k=1}^{p+1} n^{p-k+2} \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-j} \binom{p-j}{k-2-j} H_p^{p-j}.$$

У формули (17) као и у (18) остају неодређени само коефицијенти

$$C_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, p+1),$$

који су дефинисани следећим формулама:

$$
\begin{aligned}
(19) \qquad & C_1 = 1\,, \\
& C_2 = -\frac{1}{2!}C_1\,, \\
\frac{1}{1!}\,& C_3 = -\frac{1}{3!}C_1 - \frac{1}{2!}C_2\,, \\
\frac{1}{2!}\,& C_4 = -\frac{1}{4!}C_1 - \frac{1}{3!}C_2 - \frac{1}{2!}C_3\,, \\
\frac{1}{3!}\,& C_5 = -\frac{1}{5!}C_1 - \frac{1}{4!}C_2 - \frac{1}{3!}C_3 - \frac{1}{2!\,2!}C_4\,, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{(k-2)!}\,& C_k = -\frac{1}{k!}C_1 - \frac{1}{(k-1)!}C_2 - \frac{1}{(k-2)!}C_3 \\
& \qquad - \frac{1}{(k-3)!\,2!}C_4 - \cdots - \frac{1}{(k-3)!\,2!}C_{k-1}\,, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{1}{(p-1)!}\,& C_{p+1} = -\frac{1}{(p+1)!}C_1 - \frac{1}{p!}C_2 - \frac{1}{(p-1)!}C_3 \\
& \qquad - \frac{1}{(p-2)!\,2!}C_4 - \cdots - \frac{1}{(p-2)!\,2!}C_p\,.
\end{aligned}
$$

Систем (19) може се трансформисати у систем

$$
\begin{aligned}
(20) \qquad & \binom{0}{-1}C_1 = 1\,, \\
& \binom{1}{-1}C_1 + \binom{1}{0}C_2 = 0\,, \\
& \binom{2}{-1}C_1 + \binom{2}{0}C_2 + \binom{2}{1}C_3 = 0\,, \\
& \binom{3}{-1}C_1 + \binom{3}{0}C_2 + \binom{3}{1}C_3 + \binom{3}{2}C_4 = 0\,, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \binom{k-1}{-1}C_1 + \binom{k-1}{0}C_2 + \binom{k-1}{1}C_3 + \cdots + \binom{k-1}{k-2}C_k = 0\,, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \binom{p}{-1}C_1 + \binom{p}{0}C_2 + \binom{p}{1}C_3 + \cdots + \binom{p}{p-1}C_{p+1} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Веза између констаната C_k $(k=1, 2, 3, \ldots, p+1)$ и Bernoulli-евих бројева одређује се упоређујући систем (20) и систем

$$
\begin{aligned}
& 1+2B_1=0, \\
& 1+3B_1+3B_2=0, \\
(21) \quad & 1+4B_1+6B_2+4B_3=0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

којим су дефинисани Bernoulli-еви бројеви, а који се може изразити симболичком формулом[1])

$$(22) \qquad (1+B)^n-B_n=0.$$

На тај начин добијамо следећу формулу

$$(23) \qquad C_k=\frac{B_{k-1}}{k-1}, \; k=2, 3, 4, \cdots, p+1,$$

$$(C_1=1, \; C_{2l}=0, \; l=2, 3, 4, \cdots).$$

Да би смо показали тачност ове формуле послужићемо се методом математичке индукције.

За $k=2$ добија се из (23)

$$C_2=B_1,$$

што уосталом следује из прве две једначине система (20) и прве једначине система (21). Према томе тачност формуле (22) верифицирана је за $k=2$. Претпоставићемо да релација (23) постоји за $2 \leqslant k \leqslant m$ и доказаћемо да је она тачна за $k=m+1$.

Дакле имамо да је

$$(24) \qquad C_k=\frac{B_{k-1}}{k-1}, k=2, 3, 4, \cdots, m.$$

Према (20) имамо за $k=m+1$

$$\binom{m}{-1}C_1+\binom{m}{0}C_2+\cdots+\binom{m}{m-1}C_{m+1}=0,$$

а с обзиром на (24) добија се

---

1) Видети на пример:

Ch. Jordan, Calculus of Finite Differences, Budapest 1939, p. 223.

J. V. Uspensky and M. A. Heaslet, Elementary number theory, New York, 1930, p. 250,

$$\frac{1}{m+1}+B_1+\binom{m}{1}\frac{1}{2}B_2+\cdots\cdots+\binom{m}{m-2}\frac{B_{m-1}}{m-1}+\binom{m}{m-1}C_{m+1}=0\,,$$

или

$$1+\binom{m+1}{1}B_1+\binom{m+1}{2}B_2+\cdots\cdots+\binom{m+1}{m-1}B_{m-1}$$
$$+\binom{m}{m-1}(m+1)\,C_{m+1}=0\,.$$

Користећи релацију (22) која у развијеном облику за $n=m+1$ гласи

$$1+\binom{m+1}{1}B_1+\binom{m+1}{2}B_2+\cdots\cdots+\binom{m+1}{m}B_m=0\,,$$

добијамо

$$\binom{m}{m-1}(m+1)\,C_{m+1}=\binom{m+1}{m}B_m\,,$$

односно

$$C_{m+1}=\frac{B_m}{m}\,. \tag{25}$$

Одавде следује да је релација (23) доиста тачна за сваки број $k \geqslant 2$.

На основу тога формулу за збир (1) можемо написати у овом облику

$$\prod_{r=1}^{r=p}a_r+\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+\alpha_r)+\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+2\alpha_r)+\cdots\cdots+\prod_{r=1}^{r=p}[a_r+(n-1)\alpha_r]$$

$$=\sum_{k=1}^{p+1}n^{p-k+2}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{B_{k-j-1}}{k-j-1}\binom{p-j}{k-j-2}H_p^{p-j}\,, \tag{26}$$

или

$$\prod_{r=1}^{r=p}a_r+\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+\alpha_r)+\prod_{r=1}^{r=p}(a_r+2\,\alpha_r)+\cdots\cdots+\prod_{r=1}^{r=p}[a_r+(n-1)\;\alpha_r]$$

$$=\sum_{j=0}^{p}H_p^{p-j}\sum_{k=1}^{p+1-j}n^{p-k-j+2}\frac{B_{k-1}}{k-1}\binom{p-j}{k-2}. \tag{27}$$

За случај када је $p=5$ из формуле (26) добијамо овај идентитет

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + (a_1 + \alpha_1)(a_2 + \alpha_2)(a_3 + \alpha_3)(a_4 + \alpha_4)(a_5 + \alpha_5) + \cdots\cdots$$
$$\tag{28} \cdots\cdots + [a_1 + (n-1)\alpha_1][a_2 + (n-1)\alpha_2]$$
$$[a_3 + (n-1)\alpha_3][a_4 + (n-1)\alpha_4][a_5 + (n-1)\alpha_5]$$
$$= n\left(\overset{5}{A}_1 n^5 + \overset{5}{A}_2 n^4 + \overset{5}{A}_3 n^3 + \overset{5}{A}_4 n^2 + \overset{5}{A}_5\, n + \overset{5}{A}_6\right),$$

где су коефиценти $\overset{5}{A}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ дефинисани формулама:

$$\overset{5}{A}_1 = \frac{1}{6}\overset{5}{H}_5,$$

$$\overset{5}{A}_2 = -\frac{1}{2}\overset{5}{H}_5 + \frac{1}{5}\overset{4}{H}_5,$$

$$\overset{5}{A}_3 = \frac{5}{12}\overset{5}{H}_5 - \frac{1}{2}\overset{4}{H}_5 + \frac{1}{4}\overset{3}{H}_5,$$

$$\overset{5}{A}_4 = \frac{1}{3}\overset{4}{H}_5 - \frac{1}{2}\overset{3}{H}_5 + \frac{1}{3}\overset{2}{H}_5,$$

$$\overset{5}{A}_5 = -\frac{1}{12}\overset{5}{H}_5 + \frac{1}{4}\overset{3}{H}_5 - \frac{1}{2}\overset{2}{H}_5 + \frac{1}{2}\overset{1}{H}_5,$$

$$\overset{5}{A}_6 = -\frac{1}{30}\overset{4}{H}_5 + \frac{1}{6}\overset{2}{H}_5 - \frac{1}{2}\overset{1}{H}_5 + \overset{0}{H}_5.$$

Митриновићеви полиноми H_5^q $(q = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ за овај специјалан случај постају:

$$\overset{5}{H}_5 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5,$$

$$\overset{4}{H}_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 a_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5 a_3$$
$$+ \alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5 a_2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 a_1,$$

$$\overset{3}{H}_5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4 a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 a_3 a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_5 a_3 a_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 a_2 a_5$$
$$+ \alpha_1\alpha_3\alpha_5 a_2 a_4 + \alpha_1\alpha_4\alpha_5 a_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 a_1 a_5 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5 a_1 a_3$$
$$+ \alpha_2\alpha_3\alpha_5 a_1 a_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5 a_1 a_2,$$

$$\overset{2}{H}_5 = \alpha_1\alpha_2 a_3 a_4 a_5 + \alpha_1\alpha_3 a_2 a_4 a_5 + \alpha_1\alpha_4 a_2 a_3 a_5 + \alpha_1\alpha_5 a_2 a_3 a_4$$
$$+ \alpha_2\alpha_3 a_1 a_4 a_5 + \alpha_2\alpha_4 a_1 a_3 a_5 + \alpha_2\alpha_5 a_1 a_3 a_4 + \alpha_3\alpha_4 a_1 a_2 a_5$$
$$+ \alpha_3\alpha_5 a_1 a_2 a_4 + \alpha_4\alpha_5 a_1 a_2 a_3,$$

$$H_5^1 = \alpha_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + \alpha_2 a_1 a_3 a_4 a_5 + \alpha_3 a_1 a_2 a_4 a_5 + \alpha_4 a_1 a_2 a_3 a_5$$
$$+ \alpha_5 a_1 a_2 a_3 a_4 ,$$
$$H_5^0 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 .$$

III

6. Пођимо сада од релације

(29) $$1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i = A_1^i\, n^{i+1} + A_2^i\, n^i + A_3^i\, n^{i-1} + \cdots + A_{i+1}^i\, n ,$$

где су коефицијенти

$$A_1^i ,\ A_2^i ,\ A_3^i , \ldots , A_{i+1}^i$$

дефинисани системом линеарних једначина

(30) $$\begin{aligned}
&\binom{i+1}{1} A_1^i = 1 ,\\
&\binom{i+1}{2} A_1^i + \binom{i}{1} A_2^i = \binom{i}{1} ,\\
&\binom{i+1}{3} A_1^i + \binom{i}{2} A_2^i + \binom{i-1}{1} A_3^i = \binom{i}{2} ,\\
&\binom{i+1}{4} A_1^i + \binom{i}{3} A_2^i + \binom{i-1}{2} A_3^i + \binom{i-2}{1} A_4^i = \binom{i}{3} ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\binom{i+1}{k} A_1^i + \binom{i}{k-1} A_2^i + \binom{i-1}{k-2} A_3^i + \binom{i-2}{k-3} A_4^i + \cdots\\
&\quad + \binom{i-k+2}{1} A_k^i = \binom{i}{k-1} ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_1^i + A_2^i + A_3^i + \cdots + A_i^i + A_{i+1}^i = \binom{i}{i} .
\end{aligned}$$

Општа формула за збир (29) добиће се када у формули (26) ставимо:

$$\prod_{r=1}^{r=p} a_r = 1^i\,, \qquad H_p^p = 1\,,$$

$$\prod_{r=1}^{r=p} (a_r + \alpha_r) = 2^i\,, \qquad H_p^{p-1} = \binom{i}{1},$$

$$\prod_{r=1}^{r=p} (a_r + 2\,\alpha_r) = 3^i\,, \quad H_p^{p-2} = \binom{i}{2},$$

. . . .

$$\prod_{r=1}^{r=p} [a_r + (n-1)\alpha_r] = n^i, H_p^0 = \binom{i}{i}.$$

Тако добијамо

$$1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i = \sum_{k=1}^{i+1} n^{i-k+2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_{k-j-1}}{k-j-1} \binom{i-j}{k-j-2} \binom{i}{j}, \tag{31}$$

где су B_k Bernoulli-еви бројеви дефинисани системом (21).

7. Формулу за збир потенција целих бројева можемо добити и на други начин:

Из прве од једначина система (30) израчунавамо A_1^i, из друге A_2^i и уопште из k-те једначине A_k^i. Тако добијамо формуле

$$\begin{aligned} A_1^i &= K_1 \binom{i}{-1}, \\ A_2^i &= K_2 \binom{i}{0}, \\ A_3^i &= K_3 \binom{i}{1}, \\ A_4^i &= K_4 \binom{i}{2}, \\ & \;. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ A_k^i &= K_k \binom{i}{k-2}, \\ & \;. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ A_{i+1}^i &= K_{i+1} \binom{i}{i-1}. \end{aligned} \tag{32}$$

Коефицијенти $K_1, K_2, K_3, \ldots\ldots, K_{i+1}$ дефинисани су следећим формулама

$$\binom{0}{1} K_1 = 1,$$

$$\binom{1}{2} K_1 + \binom{1}{1} K_2 = 1,$$

$$\binom{2}{3} K_1 + \binom{2}{2} K_2 + \binom{2}{1} K_3 = 1,$$

$$\binom{3}{4} K_1 + \binom{3}{3} K_2 + \binom{3}{2} K_3 + \binom{3}{1} K_4 = 1,$$

(33) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\binom{k}{k+1} K_1 + \binom{k}{k} K_2 + \binom{k}{k-1} K_3 + \cdots + \binom{k}{3} K_{k-2} + \binom{k}{2} K_{k-1} + \binom{k}{1} K_k = 1,$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\binom{i+1}{i+2} K_1 + \binom{i+1}{i+1} K_2 + \binom{i+1}{i} K_3 + \cdots + \binom{i+1}{3} K_{i-1} + \binom{i+1}{2} K_i + \binom{i+1}{1} K_{i+1} = 1.$$

Формула за збир потенција целих бројева (29) добија облик:

$$1^i + 2^i + 3^i + \cdots + n^i = K_1 \binom{i}{-1} n^{i+1} + K_2 \binom{i}{0} n^i + K_3 \binom{i}{1} n^{i-1} + \cdots + K_{i+1} \binom{i}{i-1} n$$

или

$$S_i = \sum_{k=1}^{i+1} K_k \binom{i}{k-2} n^{i-k+2},$$

где су константе K_k $(k=1, 2, 3, \cdots, i+1)$ одређене формулама (33)[1]).

Посматрајући систем (33) и систем којим су дефинисани Bernoulli-еви бројеви (21) добијамо следећу релацију између наших констаната K_k и Bernoulli-евих бројева B_k.

$$K_k = \frac{B_{k-1}}{k-1}, \qquad k = 3, 4, 5, \cdots, i+1, \tag{34}$$

а при томе је

$$K_1 = 1, \quad K_2 = \frac{1}{2}.$$

Ако заменимо константе K_k одговарајућим вредностима из формуле (34) добијамо познату формулу за збир потенција целих бројева

$$\begin{aligned} (35) \qquad & 1^i + 2^i + 3^i + \cdots\cdots + n^i \\ &= \binom{i}{-1} n^{i+1} + \frac{1}{2}\binom{i}{0} n^i + \frac{B_2}{2}\binom{i}{1} n^{i-1} + \frac{B_4}{4}\binom{i}{3} n^{i-3} \\ &\quad + \frac{B_6}{6}\binom{i}{5} n^{i-5} + \cdots\cdots. \end{aligned}$$

---

1) На стр. 16 увели смо ознаку

$$\binom{s}{-1} = \frac{1}{s+1}.$$

Ради симетрије у писању увешћемо још једну нову ознаку

$$\binom{s}{s+1} = \frac{1}{s+1}.$$

Према познатој формули $\binom{m}{p} = \binom{m}{m-p}$ имамо:

$$\binom{s}{-1} = \binom{s}{s+1} = \frac{1}{s+1}.$$

Дакле нашу нову ознаку можемо сматрати као последицу пре.

8. Формула за збир

(36) $$a^p + (a+d)^p + (a+2d)^p + \cdots\cdots + [a+(n-1)d]^p$$

$$= na^p + \binom{p}{1} a^{p-1}\, d\, S_1 + \binom{p}{2} a^{p-2} d^2 S_2\,, + \cdots\cdots + d^p S_p\,,$$

где је

$$S_i = 1^i + 2^i + 3^i + \cdots\cdots + n^i$$

$$= \sum_{j=1}^{i+1} n^{i-j+2} \frac{B_{j-1}}{j-1} \binom{i}{j-2}\,,$$

$$\left(\frac{B_{j-1}}{j-1} = 1 \text{ за } j=1 \text{ и } \frac{B_{j-1}}{j-1} = \frac{1}{2} \text{ за } j=2\right),$$

јавља се као партикуларан случај наше формуле (27), када у њој ставимо:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots\cdots\cdots = a_p = a\,,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots\cdots\cdots = \alpha_p = \alpha\,,$$

$$H_p^p = d^p\,,$$

$$H_p^{p-1} = \binom{p}{p-1,} a d^{p-1}\,,$$

$$H_p^{p-2} = \binom{p}{p-2} a^2 d^{p-2}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_p^1 = \binom{p}{1} a^{p-1} d\,,$$

$$H_p^0 = \binom{p}{0} a^p\,.$$

Лако је показати да је формула за збир

$$\{(a+b)(a+2b)(a+3b)\cdots\cdots(a+pb)\}$$

$$+ \{(a+2b)(a+3b)(a+4b)\cdots\cdots[a+(p+1)\,b]\}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \{(a+nb)\,[a+(n+1)b]\,[a+(n+2)\,b]\cdots\cdots[a+(n+p-1)\,b]\},$$

$$= \frac{1}{(p+1)\,b}\Big\{[a+(n+1)\,b]\,(a+nb)\,\ldots\ldots\,[a+(n+p)\,b]$$

$$- (a+b)(a+2b)(a+3b)\,\ldots\ldots\,(a+pb)\Big\}$$

такође садржана у нашој формули (26).

Табела I

$\eta \downarrow$ \ $\nu \rightarrow$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		H_p^p	H_p^{p-1}	H_p^{p-2}	H_p^{p-3}	H_p^{p-4}	H_p^{p-5}	H_p^{p-6}	H_p^{p-7}	H_p^{p-8}	H_p^{p-9}
1	A_1^p	$\frac{1}{p+1}$									
2	A_2^p	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p}$								
3	A_3^p	$\frac{1}{12}\binom{p}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p-1}$							
4	A_4^p	0	$\frac{1}{12}\binom{p-1}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p-2}$						
5	A_5^p	$-\frac{1}{120}\binom{p}{3}$	0	$\frac{1}{12}\binom{p-2}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p-3}$					
6	A_6^p	0	$-\frac{1}{120}\binom{p-1}{3}$	0	$\frac{1}{12}\binom{p-3}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p-4}$				
7	A_7^p	$\frac{1}{252}\binom{p}{5}$	0	$-\frac{1}{120}\binom{p-2}{3}$	0	$\frac{1}{12}\binom{p-4}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p-5}$			
8	A_8^p	0	$\frac{1}{252}\binom{p-1}{5}$	0	$-\frac{1}{120}\binom{p-3}{3}$	0	$\frac{1}{12}\binom{p-5}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p-6}$		
9	A_9^p	$-\frac{1}{240}\binom{p}{7}$	0	$\frac{1}{252}\binom{p-1}{5}$	0	$-\frac{1}{120}\binom{p-4}{3}$	0	$\frac{1}{12}\binom{p-6}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p-7}$	
10	A_{10}^p	0	$-\frac{1}{240}\binom{p-1}{7}$	0	$\frac{1}{252}\binom{p-3}{5}$	0	$-\frac{1}{120}\binom{p-5}{3}$	0	$\frac{1}{12}\binom{p-7}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p-8}$

Табела II

$\nu \rightarrow$ / $\eta \downarrow$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		H_p^p	H_p^{p-1}	H_p^{p-2}	H_p^{p-3}	H_p^{p-4}	H_p^{p-5}	H_p^{p-6}	H_p^{p-7}	H_p^{p-8}	H_p^{p-9}
1	A_1^p	$\binom{p}{-1}C_1$									
2	A_2^p	$\binom{p}{0}C_2$	$\binom{p-1}{-1}C_1$								
3	A_3^p	$\binom{p}{1}C_3$	$\binom{p-1}{0}C_2$	$\binom{p-2}{-1}C_1$							
4	A_4^p	$\binom{p}{2}C_4$	$\binom{p-1}{1}C_3$	$\binom{p-2}{0}C_2$	$\binom{p-3}{-1}C_1$						
5	A_5^p	$\binom{p}{3}C_5$	$\binom{p-1}{2}C_4$	$\binom{p-2}{1}C_3$	$\binom{p-3}{0}C_2$	$\binom{p-4}{-1}C_1$					
6	A_6^p	$\binom{p}{4}C_6$	$\binom{p-1}{3}C_5$	$\binom{p-2}{2}C_4$	$\binom{p-3}{1}C_3$	$\binom{p-4}{0}C_2$	$\binom{p-5}{-1}C_1$				
7	A_7^p	$\binom{p}{5}C_7$	$\binom{p-1}{4}C_6$	$\binom{p-2}{3}C_5$	$\binom{p-3}{2}C_4$	$\binom{p-4}{1}C_3$	$\binom{p-5}{0}C_2$	$\binom{p-6}{-1}C_1$			
8	A_8^p	$\binom{p}{6}C_8$	$\binom{p-1}{5}C_7$	$\binom{p-2}{4}C_6$	$\binom{p-3}{3}C_5$	$\binom{p-4}{2}C_4$	$\binom{p-5}{1}C_3$	$\binom{p-6}{0}C_2$	$\binom{p-7}{-1}C_1$		
9	A_9^p	$\binom{p}{7}C_9$	$\binom{p-1}{6}C_8$	$\binom{p-2}{5}C_7$	$\binom{p-3}{4}C_6$	$\binom{p-4}{3}C_5$	$\binom{p-5}{2}C_4$	$\binom{p-6}{1}C_3$	$\binom{p-7}{0}C_2$	$\binom{p-8}{-1}C_1$	
10	A_{10}^p	$\binom{p}{8}C_{10}$	$\binom{p-1}{7}C_9$	$\binom{p-2}{6}C_8$	$\binom{p-3}{5}C_7$	$\binom{p-4}{4}C_6$	$\binom{p-5}{3}C_5$	$\binom{p-6}{2}C_4$	$\binom{p-7}{1}C_3$	$\binom{p-8}{0}C_2$	$\binom{p-9}{-1}C_1$

IV

Таблица збирова[1]) — Tableau des sommes[2])

1. $p = 3$

$$\sum k^3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{3}{6} n^3 + \frac{1}{4} n^2$$

$$\sum k^2 (k+1) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{5}{6} n^3 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{1}{6} n$$

$$\sum k^2 (k+2) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{7}{6} n^3 + \frac{5}{4} n^2 + \frac{2}{6} n$$

$$\sum k^2 (k+3) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{9}{6} n^3 + \frac{7}{4} n^2 + \frac{3}{6} n$$

$$\sum k^2 (k+4) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{11}{6} n^3 + \frac{9}{4} n^2 + \frac{4}{6} n$$

. . . .

$$\sum k^2 (k+r-1) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{2r+1}{6} n^3 + \frac{2r-1}{4} n^2 + \frac{r-1}{6} n$$

$$\sum k (k+1)^2 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{7}{6} n^3 + \frac{7}{4} n^2 + \frac{5}{6} n$$

$$\sum k (k+1)(k+2) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{9}{6} n^3 + \frac{11}{4} n^2 + \frac{9}{6} n$$

$$\sum k (k+1)(k+3) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{11}{6} n^3 + \frac{15}{4} n^2 + \frac{13}{6} n$$

$$\sum k (k+1)(k+4) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{13}{6} n^3 + \frac{19}{4} n^2 + \frac{17}{6} n$$

$$\sum k (k+1)(k+5) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{15}{6} n^3 + \frac{23}{4} n^2 + \frac{21}{6} n$$

. . . .

$$\sum k (k+1)(k+r-1) = \frac{1}{4} n^4 + \frac{2r+3}{6} n^3 + \frac{4r-1}{4} n^2 + \frac{4r-3}{6} n$$

---

1) Са $\sum f(k)$ je означен збир

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

2) $\sum f(k)$ signifie la somme

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

$$\sum k(k+2)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{11}{6}n^3 + \frac{17}{4}n^2 + \frac{16}{6}n$$

$$\sum k(k+2)(k+3) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{13}{6}n^3 + \frac{23}{4}n^2 + \frac{23}{6}n$$

$$\sum k(k+2)(k+4) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{15}{6}n^3 + \frac{29}{4}n^2 + \frac{30}{6}n$$

$$\sum k(k+2)(k+5) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{17}{6}n^3 + \frac{35}{4}n^2 + \frac{37}{6}n$$

$$\sum k(k+2)(k+6) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{19}{6}n^3 + \frac{41}{4}n^2 + \frac{44}{6}n$$

. . . .

$$\sum k(k+2)(k+r-1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{2r+5}{6}n^3 + \frac{6r-1}{4}n^2 + \frac{7r-5}{6}n$$

$$\sum k(k+3)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{15}{6}n^3 + \frac{31}{4}n^2 + \frac{33}{6}n$$

$$\sum k(k+3)(k+4) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{17}{6}n^3 + \frac{39}{4}n^2 + \frac{43}{6}n$$

$$\sum k(k+3)(k+5) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{19}{6}n^3 + \frac{47}{4}n^2 + \frac{53}{6}n$$

$$\sum k(k+3)(k+6) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{21}{6}n^3 + \frac{55}{4}n^2 + \frac{63}{6}n$$

$$\sum k(k+3)(k+7) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{23}{6}n^3 + \frac{63}{4}n^2 + \frac{73}{6}n$$

. . . .

$$\sum k(k+3)(k+r-1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{2r+7}{6}n^3 + \frac{8r-1}{4}n^2 + \frac{10r-7}{6}n$$

$$\sum k(k+4)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{19}{6}n^3 + \frac{49}{4}n^2 + \frac{56}{6}n$$

$$\sum k(k+4)(k+5) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{21}{6}n^3 + \frac{59}{4}n^2 + \frac{69}{6}n$$

$$\sum k(k+4)(k+6) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{23}{6}n^3 + \frac{69}{4}n^2 + \frac{82}{6}n$$

$$\sum k(k+4)(k+7) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{25}{6}n^3 + \frac{79}{4}n^2 + \frac{95}{6}n$$

$$\sum k(k+4)(k+8) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{27}{6}n^3 + \frac{89}{4}n^2 + \frac{108}{6}n$$

. . . .

$$\sum k(k+4)\,k+r-1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{2r+9}{6}n^3 + \frac{10r-1}{4}n^2 + \frac{13r-9}{6}n$$

$$\sum k^2(k+r-1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{2r+1}{6}n^3 + \frac{2r-1}{4}n^2 + \frac{r-1}{6}n$$
$$\sum k(k+1)(k+r-1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{2r+3}{6}n^3 + \frac{4r-1}{4}n^2 + \frac{4r-3}{6}n$$
$$\sum k(k+2)(k+r-1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{2r+5}{6}n^3 + \frac{6r-1}{4}n^2 + \frac{7r-5}{6}n$$
$$\sum k(k+3)(k+r-1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{2r+7}{6}n^3 + \frac{8r-1}{4}n^2 + \frac{10r-7}{6}n$$
$$\sum k(k+4)(k+r-1) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{2r+9}{6}n^3 + \frac{10r-1}{4}n^2 + \frac{13r-9}{6}n$$

. . . .

$$\sum k(k+s-1)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{4}n^4 + \frac{2r+2s-1}{6}n^3 + \frac{2rs-1}{4}n^2 + \frac{3rs-2r-2s+1}{6}n$$

2. $p=4$

$$\sum k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{2}{4}n^4 + \frac{2}{6}n^3 - \frac{1}{30}n$$
$$\sum k^3(k+1) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{3}{4}n^4 + \frac{5}{6}n^3 + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{30}n$$
$$\sum k^3(k+2) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{4}{4}n^4 + \frac{8}{6}n^3 + \frac{2}{4}n^2 - \frac{1}{30}n$$
$$\sum k^3(k+3) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{5}{4}n^4 + \frac{11}{6}n^3 + \frac{3}{4}n^2 - \frac{1}{30}n$$
$$\sum k^3(k+4) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{6}{4}n^4 + \frac{14}{6}n^3 + \frac{4}{4}n^2 - \frac{1}{30}n$$

. . . .

$$\sum k^3(k+r-1) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+1}{4}n^4 + \frac{3r-1}{6}n^3 + \frac{r-1}{4}n^2 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum k^2(k+1)^2 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{4}{4}n^4 + \frac{10}{6}n^3 + \frac{4}{4}n^2 + \frac{4}{30}n$$
$$\sum k^2(k+1)(k+2) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{5}{4}n^4 + \frac{15}{6}n^3 + \frac{7}{4}n^2 + \frac{9}{30}n$$
$$\sum k^2(k+1)(k+3) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{6}{4}n^4 + \frac{20}{6}n^3 + \frac{10}{4}n^2 + \frac{14}{30}n$$
$$\sum k^2(k+1)(k+4) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{7}{4}n^4 + \frac{25}{6}n^3 + \frac{13}{4}n^2 + \frac{19}{30}n$$
$$\sum k^2(k+1)(k+5) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{8}{4}n^4 + \frac{30}{6}n^3 + \frac{16}{4}n^2 + \frac{24}{30}n$$

. . . .

$$\sum k^2(k+1)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+2}{4}n^4 + \frac{5r}{6}n^3 + \frac{3r-2}{4}n^2 + \frac{5r-6}{30}n$$

$$\sum k^2(k+2)^2 = \frac{1}{5}n^5+\frac{6}{4}n^4+\frac{22}{6}n^3+\frac{12}{4}n^2+\frac{19}{30}n$$
$$\sum k^2(k+2)(k+3) = \frac{1}{5}n^5+\frac{7}{4}n^4+\frac{29}{6}n^3+\frac{17}{4}n^2+\frac{29}{30}n$$
$$\sum k^2(k+2)(k+4) = \frac{1}{5}n^5+\frac{8}{4}n^4+\frac{36}{6}n^3+\frac{22}{4}n^2+\frac{39}{30}n$$
$$\sum k^2(k+2)(k+5) = \frac{1}{5}n^5+\frac{9}{4}n^4+\frac{43}{6}n^3+\frac{27}{4}n^2+\frac{49}{30}n$$
$$\sum k^2(k+2)(k+6) = \frac{1}{5}n^5+\frac{10}{4}n^4+\frac{50}{6}n^3+\frac{32}{4}n^2+\frac{59}{30}n$$

. . . .

$$\sum k^2(k+2)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+3}{4}n^4+\frac{7r+1}{6}n^3+\frac{5r-3}{4}n^2+\frac{10r-11}{30}n$$

$$\sum k^2(k+3)^2 = \frac{1}{5}n^5+\frac{8}{4}n^4+\frac{38}{6}n^3+\frac{24}{4}n^2+\frac{44}{30}n$$
$$\sum k^2(k+3)(k+4) = \frac{1}{5}n^5+\frac{9}{4}n^4+\frac{47}{6}n^3+\frac{31}{4}n^2+\frac{59}{30}n$$
$$\sum k^2(k+3)(k+5) = \frac{1}{5}n^5+\frac{10}{4}n^4+\frac{56}{6}n^3+\frac{38}{4}n^2+\frac{74}{30}n$$
$$\sum k^2(k+3)(k+6) = \frac{1}{5}n^5+\frac{11}{4}n^4+\frac{65}{6}n^3+\frac{45}{4}n^2+\frac{89}{30}n$$
$$\sum k^2(k+3)(k+7) = \frac{1}{5}n^5+\frac{12}{4}n^4+\frac{74}{6}n^3+\frac{52}{4}n^2+\frac{104}{30}n$$

. . . .

$$\sum k^2(k+3)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+4}{4}n^4+\frac{9r+2}{6}n^3+\frac{7r-4}{4}n^2+\frac{15r-16}{30}n$$

$$\sum k^2(k+4)^2 = \frac{1}{5}n^5+\frac{10}{4}n^4+\frac{58}{6}n^3+\frac{40}{4}n^2+\frac{79}{30}n$$
$$\sum k^2(k+4)(k+5) = \frac{1}{5}n^5+\frac{11}{4}n^4+\frac{69}{6}n^3+\frac{49}{4}n^2+\frac{99}{30}n$$
$$\sum k^3(k+4)(k+6) = \frac{1}{5}n^5+\frac{12}{4}n^4+\frac{80}{6}n^3+\frac{58}{4}n^2+\frac{119}{30}n$$
$$\sum k^2(k+4)(k+7) = \frac{1}{5}n^5+\frac{13}{4}n^4+\frac{91}{6}n^3+\frac{67}{4}n^2+\frac{139}{30}n$$
$$\sum k^2(k+4)(k+8) = \frac{1}{5}n^5+\frac{14}{4}n^4+\frac{102}{6}n^3+\frac{76}{4}n^2+\frac{159}{30}n$$

. . . .

$$\sum k^2(k+4)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+5}{4}n^4+\frac{11r+3}{6}n^3+\frac{9r-5}{4}n^2+\frac{20r-21}{30}n$$

$$\sum k^3 (k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+1}{4}n^4 + \frac{3r-1}{6}n^3 + \frac{r-1}{4}n^2 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum k^2 (k+1)(\kappa+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+2}{4}n^4 + \frac{5r}{6}n^3 + \frac{3r-2}{4}n^2 + \frac{5r-6}{30}n$$

$$\sum \kappa^2 (\kappa+2)(\kappa+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+3}{4}n^4 + \frac{7r+1}{6}n^3 + \frac{5r-3}{4}n^2 + \frac{10r-11}{30}n$$

$$\sum \kappa^2 (\kappa+3)(\kappa+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+4}{4}n^4 + \frac{9r+2}{6}n^3 + \frac{7r-4}{4}n^2 + \frac{15r-16}{30}n$$

$$\sum \kappa^2 (\kappa+4)(\kappa+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+5}{4}n^4 + \frac{11r+3}{6}n^3 + \frac{9r-5}{4}n^2 + \frac{20r-21}{30}n$$

. . . .

$$\sum \kappa^2 (\kappa+s-1)(\kappa+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+s}{4}n^4 + \frac{2rs+r+s-2}{6}n^3 + \frac{2rs-r-s}{4}n^2 + \frac{5rs-5r-5s+4}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+1)^3 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{5}{4}n^4 + \frac{17}{6}n^3 + \frac{11}{4}n^2 + \frac{29}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+1)^2(\kappa+2) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{6}{4}n^4 + \frac{24}{6}n^3 + \frac{18}{4}n^2 + \frac{54}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+1)^2(\kappa+3) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{7}{4}n^4 + \frac{31}{6}n^3 + \frac{25}{4}n^2 + \frac{79}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+1)^2(\kappa+4) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{8}{4}n^4 + \frac{38}{6}n^3 + \frac{32}{4}n^2 + \frac{104}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+1)^2(\kappa+5) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{9}{4}n^4 + \frac{45}{6}n^3 + \frac{39}{4}n^2 + \frac{129}{30}n$$

. . . .

$$\sum \kappa(\kappa+1)^2(\kappa+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+3}{4}n^4 + \frac{7r+3}{6}n^3 + \frac{7r-3}{4}n^2 + \frac{25r-21}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+2)^2$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{7}{4}n^4+\frac{33}{6}n^3+\frac{29}{4}n^2+\frac{99}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{8}{4}n^4+\frac{42}{6}n^3+\frac{40}{4}n^2+\frac{144}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+2)(k+4)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{9}{4}n^4+\frac{51}{6}n^3+\frac{51}{4}n^2+\frac{189}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+2)(k+5)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{10}{4}n^4+\frac{60}{6}n^3+\frac{62}{4}n^2+\frac{234}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+2)(k+6)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{11}{4}n^4+\frac{69}{6}n^3+\frac{73}{4}n^2+\frac{279}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+1)(k+2)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+4}{4}n^4+\frac{9r+6}{6}n^3+\frac{11r-4}{4}n^2+\frac{45r-36}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+3)^2$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{9}{4}n^4+\frac{53}{6}n^3+\frac{55}{4}n^2+\frac{209}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+3)(k+4)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{10}{4}n^4+\frac{64}{6}n^3+\frac{70}{4}n^2+\frac{274}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+3)(k+5)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{11}{4}n^4+\frac{75}{6}n^3+\frac{85}{4}n^2+\frac{339}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+3)(k+6)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{12}{4}n^4+\frac{86}{6}n^3+\frac{100}{4}n^2+\frac{404}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+3)(k+7)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{13}{4}n^4+\frac{97}{6}n^3+\frac{115}{4}n^2+\frac{469}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+1)(k+3)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+5}{4}n^4+\frac{11r+9}{6}n^3+\frac{15r-5}{4}n^2+\frac{65r-51}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+4)^2 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{11}{4}n^4 + \frac{77}{6}n^3 + \frac{89}{4}n^2 + \frac{359}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+4)(k+5) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{12}{4}n^4 + \frac{90}{6}n^3 + \frac{108}{4}n^2 + \frac{444}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+4)(k+6) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{13}{4}n^4 + \frac{103}{6}n^3 + \frac{127}{4}n^2 + \frac{529}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+4)(k+7) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{14}{4}n^4 + \frac{116}{6}n^3 + \frac{146}{4}n^2 + \frac{614}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+4)(k+8) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{15}{4}n^4 + \frac{129}{6}n^3 + \frac{165}{4}n^2 + \frac{699}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+1)(k+4)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+6}{4}n^4 + \frac{13r+12}{6}n^3 + \frac{19r-6}{4}n^2 + \frac{85r-66}{30}n$$

$$\sum k(k+1)(k+5)^2 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{13}{4}n^4 + \frac{105}{6}n^3 + \frac{131}{4}n^2 + \frac{549}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+5)(k+6) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{14}{4}n^4 + \frac{120}{6}n^3 + \frac{154}{4}n^2 + \frac{654}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+5)(k+7) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{15}{4}n^4 + \frac{135}{6}n^3 + \frac{177}{4}n^2 + \frac{759}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+5)(k+8) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{16}{4}n^4 + \frac{150}{6}n^3 + \frac{200}{4}n^2 + \frac{864}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+5)(k+9) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{17}{4}n^4 + \frac{175}{6}n^3 + \frac{223}{4}n^2 + \frac{969}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+1)(k+5)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+7}{4}n^4 + \frac{15r+15}{6}n^3 + \frac{23r-7}{4}n^2 + \frac{105r-81}{30}n$$

$$\sum k(k+1)^2(k+r-1) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+3}{4}n^4 + \frac{7r+3}{6}n^3 + \frac{7r-3}{4}n^2 + \frac{25r-21}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+2)(k+r-1) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+4}{4}n^4 + \frac{9r+6}{6}n^3 + \frac{11r-4}{4}n^2 + \frac{45r-36}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+3)(k+r-1) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+5}{4}n^4 + \frac{11r+9}{6}n^3 + \frac{15r-5}{4}n^2 + \frac{65r-51}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+4)(k+r-1) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+6}{4}n^4 + \frac{13r+12}{6}n^3 + \frac{19r-6}{4}n^2 + \frac{85r-66}{30}n$$
$$\sum k(k+1)(k+5)(k+r-1) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+7}{4}n^4 + \frac{15r+15}{6}n^3 + \frac{23r-7}{4}n^2 + \frac{105r-81}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+1)(k+s-1)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+s+1}{4}n^4 + \frac{2rs+3r+3s-3}{6}n^3 + \frac{4rs-r-s-1}{4}n^2$$
$$+ \frac{20rs-15r-15s+9}{30}n$$

$$\sum k(k+2)^3 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{8}{4}n^4 + \frac{44}{6}n^3 + \frac{46}{4}n^2 + \frac{179}{30}n$$

$$\sum k(k+2)^2(k+3) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{9}{4}n^4 + \frac{55}{6}n^3 + \frac{63}{4}n^2 + \frac{259}{30}n$$

$$\sum k(k+2)^2(k+4) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{10}{4}n^4 + \frac{66}{6}n^3 + \frac{80}{4}n^2 + \frac{339}{30}n$$

$$\sum k(k+2)^2(k+5) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{11}{4}n^4 + \frac{77}{6}n^3 + \frac{97}{4}n^2 + \frac{419}{30}n$$

$$\sum k(k+2)^2(k+6) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{12}{4}n^4 + \frac{88}{6}n^3 + \frac{114}{4}n^2 + \frac{499}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+2)^2(k+r-1)$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+5}{4}n^4 + \frac{11r+11}{6}n^3 + \frac{17r-5}{4}n^2 + \frac{80r-61}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+3)^2 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{10}{4}n^4 + \frac{68}{6}n^3 + \frac{86}{4}n^2 + \frac{374}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+3)(k+4) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{11}{4}n^4 + \frac{81}{6}n^3 + \frac{109}{4}n^2 + \frac{489}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+3)(k+5) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{12}{4}n^4 + \frac{94}{6}n^3 + \frac{132}{4}n^2 + \frac{604}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+3)(k+6) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{13}{4}n^4 + \frac{107}{6}n^3 + \frac{155}{4}n^2 + \frac{719}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+3)(k+7) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{14}{4}n^4 + \frac{120}{6}n^3 + \frac{178}{4}n^2 + \frac{834}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+2)(k+3)(k+r-1)$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+6}{4}n^4 + \frac{13r+16}{6}n^3 + \frac{23r-6}{4}n^2 + \frac{115r-86}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+4)^2 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{12}{4}n^4 + \frac{96}{6}n^3 + \frac{138}{4}n^2 + \frac{639}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+4)(k+5) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{13}{4}n^4 + \frac{111}{6}n^3 + \frac{167}{4}n^2 + \frac{789}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+4)(k+6) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{14}{4}n^4 + \frac{126}{6}n^3 + \frac{196}{4}n^2 + \frac{939}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+4)(k+7) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{15}{4}n^4 + \frac{141}{6}n^3 + \frac{225}{4}n^2 + \frac{1089}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+4)(k+8) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{16}{4}n^4 + \frac{156}{6}n^3 + \frac{254}{4}n^2 + \frac{1239}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+2)(k+4)(k+r-1)$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+7}{4}n^4 + \frac{15r+21}{6}n^3 + \frac{29r-7}{4}n^2 + \frac{150r-111}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+2)(k+5)^2 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{14}{4}n^4 + \frac{128}{6}n^3 + \frac{202}{4}n^2 + \frac{974}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+2)(\kappa+5)(k+6) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{15}{4}n^4 + \frac{145}{6}n^3 + \frac{237}{4}n^2 + \frac{1159}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+2)(\kappa+5)(k+7) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{16}{4}n^4 + \frac{162}{6}n^3 + \frac{272}{4}n^2 + \frac{1344}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+2)(\kappa+5)(\kappa+8) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{17}{4}n^4 + \frac{179}{6}n^3 + \frac{307}{4}n^2 + \frac{1529}{30}n$$

$$\sum \kappa(\kappa+2)(\kappa+5)(\kappa+9) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{18}{4}n^4 + \frac{196}{6}n^3 + \frac{342}{4}n^2 + \frac{1714}{30}n$$

. . . .

$$\sum \kappa(\kappa+2)(\kappa+5)(\kappa+r-1)$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+8}{4}n^4 + \frac{17r+26}{6}n^3 + \frac{35r-8}{4}n^2 + \frac{185r-136}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+6)^2 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{16}{4}n^4 + \frac{164}{6}n^3 + \frac{278}{4}n^2 + \frac{1379}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+6)(k+7) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{17}{4}n^4 + \frac{183}{6}n^3 + \frac{319}{4}n^2 + \frac{1599}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+6)(k+8) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{18}{4}n^4 + \frac{202}{6}n^3 + \frac{360}{4}n^2 + \frac{1819}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+6)(k+9) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{19}{4}n^4 + \frac{221}{6}n^3 + \frac{401}{4}n^2 + \frac{2039}{30}n$$

$$\sum k(k+4)(k+6)(k+10) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{20}{4}n^4 + \frac{240}{6}n^3 + \frac{442}{4}n^2 + \frac{2259}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+2)\,k+6)(k+r-1)$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+9}{4}n^4 + \frac{19r+31}{6}n^3 + \frac{41r-9}{4}n^2 + \frac{220r-161}{30}n$$

$$\sum k(k+2)^2(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+5}{4}n^4+\frac{11r+11}{6}n^3+\frac{17r-5}{4}n^2+\frac{80r-61}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+3)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+6}{4}n^4+\frac{13r+16}{6}n^3+\frac{23r-6}{4}n^2+\frac{115r-86}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+4)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+7}{4}n^4+\frac{15r+21}{6}n^3+\frac{29r-7}{4}n^2+\frac{150r-111}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+5)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+8}{4}n^4+\frac{17r+26}{6}n^3+\frac{35r-8}{4}n^2+\frac{185r-136}{30}n$$

$$\sum k(k+2)(k+6)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+9}{4}n^4+\frac{19r+31}{6}n^3+\frac{41r-9}{4}n^2+\frac{220r-161}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+2)(k+s-1)(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+s+2}{4}n^4+\frac{2rs+5r+5s-4}{6}n^3+\frac{6rs-r-s-2}{4}n^2$$
$$+\frac{35rs-25r-25s+14}{30}n$$

$$\sum k(k+3)^3 =\frac{1}{5}n^5+\frac{11}{4}n^4+\frac{83}{6}n^3+\frac{117}{4}n^2+\frac{539}{30}n$$

$$\sum k(k+3)^2(k+4)=\frac{1}{5}n^5+\frac{12}{4}n^4+\frac{98}{6}n^3+\frac{148}{4}n^2+\frac{704}{30}n$$

$$\sum k(k+3)^2(k+5)=\frac{1}{5}n^5+\frac{13}{4}n^4+\frac{113}{6}n^3+\frac{179}{4}n^2+\frac{869}{30}n$$

$$\sum k(k+3)^2(k+6)=\frac{1}{5}n^5+\frac{14}{4}n^4+\frac{128}{6}n^3+\frac{210}{4}n^2+\frac{1034}{30}n$$

$$\sum k(k+3)^2(k+7)=\frac{1}{5}n^5+\frac{15}{4}n^4+\frac{143}{6}n^3+\frac{241}{4}n^2+\frac{1199}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+3)^2(k+r-1)$$
$$=\frac{1}{5}n^5+\frac{r+7}{4}n^4+\frac{15r+23}{6}n^3+\frac{31r-7}{4}n^2+\frac{165r-121}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+4)^2 \qquad\quad = \frac{1}{5}n^5 + \frac{13}{4}n^4 + \frac{115}{6}n^3 + \frac{187}{4}n^2 + \frac{919}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+4)(k+5) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{14}{4}n^4 + \frac{132}{6}n^3 + \frac{226}{4}n^2 + \frac{1134}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+4)(k+6) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{15}{4}n^4 + \frac{149}{6}n^3 + \frac{265}{4}n^2 + \frac{1349}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+4)(k+7) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{16}{4}n^4 + \frac{166}{6}n^3 + \frac{304}{4}n^2 + \frac{1564}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+4)(k+8) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{17}{4}n^4 + \frac{183}{6}n^3 + \frac{343}{4}n^2 + \frac{1779}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+3)(k+4)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+8}{4}n^4 + \frac{17r+30}{6}n^3 + \frac{39r-8}{4}n^2 + \frac{215r-156}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+5)^2 \qquad\quad = \frac{1}{5}n^5 + \frac{15}{4}n^4 + \frac{151}{6}n^3 + \frac{273}{4}n^2 + \frac{1399}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+5)(k+6) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{16}{4}n^4 + \frac{170}{6}n^3 + \frac{320}{4}n^2 + \frac{1664}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+5)(k+7) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{17}{4}n^4 + \frac{189}{6}n^3 + \frac{367}{4}n^2 + \frac{1929}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+5)(k+8) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{18}{4}n^4 + \frac{208}{6}n^3 + \frac{414}{4}n^2 + \frac{2194}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+5)(k+9) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{19}{4}n^4 + \frac{227}{6}n^3 + \frac{461}{4}n^2 + \frac{2459}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+3)(k+5)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+9}{4}n^4 + \frac{19r+37}{6}n^3 + \frac{47r-9}{4}n^2 + \frac{265r-191}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+6)^2 \qquad\quad = \frac{1}{5}n^5 + \frac{17}{4}n^4 + \frac{191}{6}n^3 + \frac{375}{4}n^2 + \frac{1979}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+6)(k+7) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{18}{4}n^4 + \frac{212}{6}n^3 + \frac{430}{4}n^2 + \frac{2294}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+6)(k+8) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{19}{4}n^4 + \frac{233}{6}n^3 + \frac{485}{4}n^2 + \frac{2609}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+6)(k+9) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{20}{4}n^4 + \frac{254}{6}n^3 + \frac{540}{4}n^2 + \frac{2924}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+6)(k+10) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{21}{4}n^4 + \frac{275}{6}n^3 + \frac{595}{4}n^2 + \frac{3239}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+3)(k+6)(k+r-1)$$
$$\frac{1}{5}n^5 + \frac{r+10}{4}n^4 + \frac{21r+44}{6}n^3 + \frac{55r-10}{4}n^2 + \frac{315r-226}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+7)^2 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{19}{4}n^4 + \frac{235}{6}n^3 + \frac{493}{4}n^2 + \frac{2659}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+7)(k+8) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{20}{4}n^4 + \frac{258}{6}n^3 + \frac{556}{4}n^2 + \frac{3024}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+7)(k+9) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{21}{4}n^4 + \frac{281}{6}n^3 + \frac{619}{4}n^2 + \frac{3389}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+7)(k+10) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{22}{4}n^4 + \frac{304}{6}n^3 + \frac{682}{4}n^2 + \frac{3754}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+7)(k+11) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{4}n^4 + \frac{327}{6}n^3 + \frac{745}{4}n^2 + \frac{4119}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+3)(k+7)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+11}{4}n^4 + \frac{23r+51}{6}n^3 + \frac{63r-11}{4}n^2 + \frac{365r-261}{30}n$$

$$\sum k(k+3)^2(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+7}{4}n^4 + \frac{15r+23}{6}n^3 + \frac{31r-7}{4}n^2 + \frac{165r-121}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+4)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+8}{4}n^4 + \frac{17r+30}{6}n^3 + \frac{39r-8}{4}n^2 + \frac{215r-156}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+5)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+9}{4}n^4 + \frac{19r+37}{6}n^3 + \frac{47r-9}{4}n^2 + \frac{265r-191}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+6)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+10}{4}n^4 + \frac{21r+44}{6}n^3 + \frac{55r-10}{4}n^2 + \frac{315r-226}{30}n$$

$$\sum k(k+3)(k+7)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+11}{4}n^4 + \frac{23r+51}{6}n^3 + \frac{63r-11}{4}n^2 + \frac{365r-261}{30}n$$

. . . .

$$\sum k(k+3)(k+s-1)(k+r-1)$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{r+s+3}{4}n^4 + \frac{2rs+7r+7s-5}{6}n^3 + \frac{8rs-r-s-3}{4}n^2$$
$$+ \frac{50rs-35r-35s+19}{30}n$$

Résumé

SUR LA SOMME D'UNE SÉRIE

Par
KOVINA MILOŠEVIĆ

1. En partant d'un résultat de D. S. Mitrinovitch[1]) et en faisant des transformations convenables, on obtient, dans cette étude, la formule suivante[2]):

$$\prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p}(a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p}(a_r+2\alpha_r) + \cdots\cdots + \prod_{r=1}^{r=p}[a_r+(n-1)\alpha_r]$$

$$(*) \qquad = \sum_{k=1}^{p+1} n^{p-k+2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_{k-j-1}}{k-j-1} \binom{p-j}{k-j-2} H_p^{p-j},$$

où n et p désignent des entiers positifs, a_r et α_r $(r=1,2,\ldots,p)$ des constantes quelconques, B_n les nombres de Bernoulli définis par la relation symbolique

$$(1+B)^n - B_n = 0.$$

Dans la formule (*) interviennent les expressions H_p^q $(q=0,1,2,\ldots,p)$ définies par l'identité

$$\prod_{\nu=1}^{s}(a_\nu + x\alpha_\nu) \equiv \sum_{t=0}^{s} H_s^t x^t.$$

Ainsi, par exemple, dans le cas où $p=5$, on obtient la formule suivante

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 &+ (a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2)(a_3+\alpha_3)(a_4+\alpha_4)(a_5+\alpha_5) + \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots + [a_1+(n-1)\alpha_1][a_2+(n-1)\alpha_2] \\ &[a_3+(n-1)\alpha_3][a_4+(n-1)\alpha_4][a_5+(n-1)\alpha_5] \\ &= n\left(\overset{5}{A}_1 n^5 + \overset{5}{A}_2 n^4 + \overset{5}{A}_3 n^3 + \overset{5}{A}_4 n^2 + \overset{5}{A}_5 n + \overset{5}{A}_6\right), \end{aligned}$$

---

[1]) *Sur les nombres de Stirling*, Annuaire de la Faculté de philosophie de l'Université de Skopje, t. 1, 1948, p. 49—95.

[2]) On admet:

$$\frac{B_r}{r} = 0 \text{ pour } r=0,$$

$$\binom{s}{-1} = \frac{1}{s+1} \ (s\text{=entier}).$$

où les cofficients $A_i^5\,(i=1,2,3,4,5,6)$ sont donnés par:

$$A_1^5 = \frac{1}{6} H_5^5 ,$$

$$A_2^5 = -\frac{1}{2} H_5^5 + \frac{1}{5} H_5^4 ,$$

$$A_3^5 = \frac{5}{12} H_5^5 - \frac{1}{2} H_5^4 + \frac{1}{4} H_5^3 ,$$

$$A_4^5 = \frac{1}{3} H_5^4 - \frac{1}{2} H_5^3 + \frac{1}{3} H_5^2 ,$$

$$A_5^5 = -\frac{1}{12} H_5^5 + \frac{1}{4} H_5^3 - \frac{1}{2} H_5^2 + \frac{1}{2} H_5^1 ,$$

$$A_6^5 = -\frac{1}{30} H_5^4 + \frac{1}{6} H_5^2 - \frac{1}{2} H_5^1 + H_5^0 .$$

Les expressions $H_5^q\ (q=0,1,2,3,4,5)$ dans ce cas particulier, deviennent:

$$H_5^5 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 ,$$

$$\begin{aligned} H_5^4 = {} & \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 a_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5 a_3 \\ & + \alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5 a_2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 a_1 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_5^3 = {} & \alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4 a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 a_3 a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_5 a_3 a_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 a_2 a_5 \\ & + \alpha_1\alpha_3\alpha_5 a_2 a_4 + \alpha_1\alpha_4\alpha_5 a_2 a_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 a_1 a_5 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5 a_1 a_3 \\ & + \alpha_2\alpha_3\alpha_5 a_1 a_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5 a_1 a_2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_5^2 = {} & \alpha_1\alpha_2 a_3 a_4 a_5 + \alpha_1\alpha_3 a_2 a_4 a_5 + \alpha_1\alpha_4 a_2 a_3 a_5 + \alpha_1\alpha_5 a_2 a_3 a_4 \\ & + \alpha_2\alpha_3 a_1 a_4 a_5 + \alpha_2\alpha_4 a_1 a_3 a_5 + \alpha_2\alpha_5 a_1 a_3 a_4 + \alpha_3\alpha_4 a_1 a_2 a_5 \\ & + \alpha_3\alpha_5 a_1 a_2 a_4 + \alpha_4\alpha_5 a_1 a_2 a_3 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_5^1 = {} & \alpha_1 a_2 a_3 a_4 a_5 + \alpha_2 a_1 a_3 a_4 a_5 + \alpha_3 a_1 a_2 a_4 a_5 + \alpha_4 a_1 a_2 a_3 a_5 \\ & + \alpha_5 a_1 a_2 a_3 a_4 , \end{aligned}$$

$$H_5^0 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 .$$