О ЈЕДНОЈ ФОРМУЛИ ИЗ ТЕОРИЈЕ РЕДОВА

КОВИНА МИЛОШЕВИЋ, Скопље

Посматрајмо p аритметичких прогресија

$$a_r,\ a_r+\alpha_r,\ a_r+2\alpha_r, \ldots\ldots, a_r+(n-1)\alpha_r$$
$$(r=1, 2, 3, \ldots, p),$$

где су: n и $p \geqslant 2$ два цела позитивна броја, a_r и α_r ма какве константе.

Формираћемо израз

$$\prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p}(a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p}(a_r+2\alpha_r) + \cdot\ \cdot\ \cdot + \prod_{r=1}^{r=p}[a_r+(n-1)\alpha_r] \tag{1}$$

и потражити збир тог израза са коначним бројем чланова,

Д. Митриновић, [1] даје поступак за израчунавање збира (1), који се састоји у следећем:

Ако са $f(n)$ означимо израз (1) тада постоји идентитет

$$f(n+1)-f(n) = \prod_{r=1}^{r=p}(a_r+n\alpha_r), \tag{2}$$

где је $f(n)$ полином по n, степена $(p+1)$ облика:

$$f(n) = A_1^p\, n^{p+1} + A_2^p\, n^p + \cdot\ \cdot\ \cdot + A_{p+1}^p\, n + A_{p+2}^p. \tag{3}$$

Идентитет (2) доводи до овог система линеарних једначина

$$\begin{aligned}
&\tbinom{p+1}{1} A_1^p = \prod \alpha_r,\\
&\tbinom{p+1}{2} A_1^p + \tbinom{p}{1} A_2^p = \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1},\\
&\tbinom{p+1}{3} A_1^p + \tbinom{p}{2} A_2^p + \tbinom{p-1}{1} A_3^p = \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2},\\
&\tbinom{p+1}{4} A_1^p + \tbinom{p}{3} A_2^p + \tbinom{p-1}{2} A_3^p + \tbinom{p-2}{1} A_4^p = \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdot\frac{a_3}{\alpha_3},\\
&\text{— — — — — — — — — — — — — — — — — — —}\\
&\tbinom{p+1}{k} A_1^p + \tbinom{p}{k-1} A_2^p + \tbinom{p-1}{k-2} A_3^p + \tbinom{p-2}{k-3} A_4^p + \cdot\ \cdot\ \cdot +\\
&\qquad + \tbinom{p-k+2}{1} A_k^p = \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1}\cdot\frac{a_2}{\alpha_2}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \frac{a_{k-1}}{\alpha_{k-1}},\\
&\text{— — — — — — — — — — — — — — — — — — —}\\
&A_1^p + A_2^p + A_3^p + \cdot\ \cdot\ \cdot + A_p^p + A_{p+1}^p = \prod a_r.
\end{aligned} \tag{4}$$

У систему једначина (4) употребљене су, ради краткоће у писању, следеће ознаке:

$$\prod \alpha_r = \prod_{r=1}^{r=p} \alpha_r , \quad \prod a_r = \prod_{r=1}^{r=p} a_r ,$$

$$\sum \frac{a_1}{\alpha_1} = \frac{a_1}{\alpha_1} + \frac{a_2}{\alpha_2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{a_p}{\alpha_p} ,$$

$$\sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} = \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} + \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_3}{\alpha_3} + \cdot \cdot \cdot + \frac{a_{p-1}}{\alpha_{p-1}} \cdot \frac{a_p}{\alpha_p} ,$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$\sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{a_k}{\alpha_k} = \text{збиру производа израза}$$

$$\frac{a_1}{\alpha_1}, \ \frac{a_2}{\alpha_2}, \cdot \cdot \cdot , \frac{a_p}{\alpha_p}$$

узетих k по k $(k \leqslant p)$.

Из релације (3) излази

$$f(1) = A_1{}^p + A_2{}^p + A_3{}^p + \cdot \cdot \cdot + A_{p+1}^p + A_{p+2}^p ,$$

или, према (1)

$$A_1{}^p + A_2{}^p + \cdot \cdot \cdot + A_{p+1}^p + A_{p+2}^p = \prod a_r .$$

Упоређењем ове релације са последњом од наведеник у систему (4) добија се

$$A_{p+2}^p = 0 ,$$

што значи да је полином $f(n)$ дељив са n.

Систем (4) од $(p+1)$ једначина првога степена са $(p+1)$ непознатих

$$(5) \qquad A_1{}^p, \ A_2{}^p, \ A_3{}^p, \cdot \cdot \cdot , A_{p+1}^p$$

има јединствен скуп решења, пошто је детерминанта тог система

$$(p+1)!$$

тј. вредност која је увек различита од нуле, јер је према претпоставци,

$$p \geqslant 2 .$$

Коефицијенти полинома (3)

$$A_1{}^p, \ A_2{}^p, \ A_3{}^p, \cdot \cdot \cdot , A_{p+1}^p$$

јесу линеарне комбинације израза:

$$\prod \alpha_r , \ \prod a_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} , \ \prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} , \cdot \cdot \cdot ,$$

$$\prod \alpha_r \cdot \sum \frac{a_1}{\alpha_1} \cdot \frac{a_2}{\alpha_2} \cdot \cdot \cdot \frac{a_k}{\alpha_k} , \cdot \cdot \cdot , \prod a_r ;$$

се систем (4) може написати и на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
&A_1{}^p = \lambda_{11} H_p{}^p \\
&A_2{}^p = \lambda_{21} H_p{}^p + \lambda_{22} H_p{}^{p-1} \\
&A_3{}^p = \lambda_{31} H_p{}^p + \lambda_{32} H_p{}^{p-1} + \lambda_{33} H_p{}^{p-2} \\
(6)\quad &- - - - - - - - - - - - - - - - \\
&A_k{}^p = \lambda_{k1} H_p{}^p + \lambda_{k2} H_p{}^{p-1} + \lambda_{k3} H_p{}^{p-2} + \cdot \cdot \cdot + \lambda_{kk} H_p{}^{p-k+1} \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - \\
&A_{p+1}^p = \lambda_{p+1,1} H_p{}^p + \lambda_{p+1,2} H_p{}^{p-1} + \lambda_{p+1,3} H_p{}^{p-2} + \cdots + \lambda_{p+1,p+1} H_p{}^0
\end{aligned}
$$

где су $\lambda_{\eta\nu}$ нумеричке константе које треба одредити, а

$$H_p{}^q \qquad\qquad (q = 0, 1, 2, 3, \ldots, p).$$

Митриновић-еви *полиноми* који се добијају на следећи начин:

Формирају се комбинације без понављања класе q од p елемената

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_p,$$

и комбинације класе $(p-q)$ од p елемената

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p.$$

Комбинација и од једних и од других елемената биће подједнак број, јер је

$$\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}.$$

Затим се посматрају две такве комбинације, једна од елемената α_r, друга од елемената a_r, тако да се у њима сваки од индекса

$$1, 2, 3, \ldots, p$$

појављује само једанпут. За такве две комбинације каже се да су *кореспондентне.*

Митриновић-ев полином $H_p{}^q$ једнак је збиру производа кореспондентних комбинација.

Полазећи од претходних резултата *Д. Митриновић*-а може се доћи до опште формуле за збир (1), као и до неких других закључака.

Формулу за збир (1) написаћемо у следећем облику

$$
\begin{aligned}
(7)\quad &\prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r + \alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p} (a_r + 2\alpha_r) + \cdot \cdot \cdot + \prod_{r=1}^{r=p} [a_r + (n-1)\alpha_r] \\
&= A_1{}^p n^{p+1} + A_2{}^p n^p + \cdot \cdot \cdot + A_{p+1}^p n.
\end{aligned}
$$

Коефицијенте

$$A_1{}^p, A_2{}^p, A_3{}^p, \cdot \cdot \cdot, A_{p+1}^p$$

израчунавамо из система (4) и, служећи се методом потпуне математичке индукције, добијамо формулу

$$A_k{}^p = \sum_{j=0}^{j=k-1} \frac{B_{k-j-1}}{k-j-1} \binom{p-j}{k-j-2} H_p^{p-j}.$$

Према томе, општа формула за збир производа чланова истога ранга коначног броја аритметичких прогресија може се написати на следећи начин:

$$\prod_{r=1}^{r=p} a_r + \prod_{r=1}^{r=p}(a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=p}(a_r+2\alpha_r) + \cdot\cdot\cdot + \prod_{r=1}^{r=p}[a_r+(n-1)\alpha_r] =$$

(8)

$$= \sum_{k=1}^{k=p+1} n^{p-k+1} \sum_{j=0}^{j=k-1} \frac{B_{k-j-1}}{k-j-1} \binom{p-j}{k-j-2} H_p^{p-j}$$

или

$$\prod_{r=1}^{r=1} a_r + \prod_{r=1}^{r=1}(a_r+\alpha_r) + \prod_{r=1}^{r=1}(a_r+2\alpha_r) + \cdot\cdot\cdot + \prod_{r=1}^{r=p}[a_r+(n-1)\alpha_r] =$$

(8′)

$$= \sum_{j=0}^{j=p} H_p^{p-j} \sum_{k=1}^{k=p+1} n^{p-k+j+2} \frac{B_{k-1}}{k-1} \binom{p-j}{k-2},$$

где су B_m *Bernoulli*-еви бројеви дефинисани системом једначина (в. напр, [2])

$$1+2B_1=0$$
$$1+3B_1+3B_2=0$$
$$1+4B_1+6B_2+4B_3=0$$
$$\text{— — — — — — —}$$

или симболичком формулом

$$(1+B)^m - B_m = 0.$$

При томе је

$$\frac{B_r}{r} = 1 \quad \text{за} \quad r=0.$$

Ради задржавања симетрије у писању у формули (8), као и у (8′), употребљена је ознака

$$\binom{s}{-1} = \frac{1}{s+1},$$

где је s цео позитиван број.

Позната формула за збир степена природних бројева (в. нпр. [3])

(9) $$1^p+2^p+3^p+\cdot\cdot\cdot+n^p =$$

$$= \binom{p}{-1} n^{p+1} + \frac{1}{2}\binom{p}{0} n^p + \frac{B_2}{2}\binom{p}{1} n^{p-1} + \frac{B_4}{4}\binom{p}{3} n^{p-3} + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

може се добити из формуле (8), када у њој ставимо

$$\prod_{r=1}^{r=p} a_r = 1^p \qquad H_p{}^p = 1$$

$$\prod_{r=1}^{r=p} (a_r + \alpha_r) = 2^p \qquad H_p^{p-1} = \binom{p}{1}$$

$$\prod_{r=1}^{r=p} (a_r + 2\alpha_r) = 3^p \qquad H_p^{p-2} = \binom{p}{2}$$

— — — — — — — — — —

$$\prod_{r=1}^{r=p} [a_r + (n-1)\alpha_r] = n^p \qquad H^0{}_p = \binom{p}{p}$$

За случај када је $p=5$ из формуле (8) добијамо овај идентитет

$$a_1a_2a_3a_4a_5 + (a_1+\alpha_1)(a_2+\alpha_2)(a_3+\alpha_3)(a_4+\alpha_4)(a_5+\alpha_5) + \cdots$$
$$\cdots + [a_1+(n-1)\alpha_1][a_2+(n-1)\alpha_2][a_3+(n-1)\alpha_3][a_4+(n-1)\alpha_4][a_5 +$$
$$+ (n-1)\alpha_5] = n(A_1{}^5 n^5 + A_2{}^5 n^4 + A_3{}^5 n^3 + A_4{}^5 n^2 + A_5{}^5 n + A_0{}^5),$$

где су коефицијенти $A_i{}^5$ дефинисани формулама:

$$A_1{}^5 = \frac{1}{6} H_5{}^5$$

$$A_2{}^5 = -\frac{1}{2} H_5{}^5 + \frac{1}{5} H_5{}^4$$

$$A_3{}^5 = \frac{5}{12} H_5{}^5 - \frac{1}{2} H_5{}^4 + \frac{1}{4} H_5{}^3$$

$$A_4{}^5 = \frac{1}{4} H_5{}^4 - \frac{1}{2} H_5{}^3 + \frac{1}{3} H_5{}^2$$

$$A_5{}^5 = -\frac{1}{12} H_5{}^5 + \frac{1}{4} H_5{}^3 - \frac{1}{2} H_5{}^2 + \frac{1}{2} H_5{}^1$$

$$A_0{}^5 = -\frac{1}{30} H_5{}^4 + \frac{1}{6} H_5{}^2 - \frac{1}{2} H_5{}^1 + H_5{}^0 .$$

Митриновић-еви полиноми $H_p{}^q$ за овај специјалан случај постају

$$H_5{}^5 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$
$$H_5{}^4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5 a_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5 a_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5 a_2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 a_1$$
$$H_5{}^3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 a_4a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 a_3a_5 + \alpha_1\alpha_2\alpha_5 a_3a_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 a_2a_5 + \alpha_1\alpha_3\alpha_5 a_2a_4$$
$$+ \alpha_1\alpha_4\alpha_5 a_2a_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 a_1a_5 + \alpha_2\alpha_4\alpha_5 a_1a_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_5 a_1a_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_5 a_1a_2$$
$$H_5{}^2 = \alpha_1\alpha_2 a_3a_4a_5 + \alpha_1\alpha_3 a_2a_4a_5 + \alpha_1\alpha_4 a_2a_3a_5 + \alpha_1\alpha_5 a_2a_3a_4 + \alpha_2\alpha_3 a_1a_4a_5$$
$$+ \alpha_2\alpha_4 a_1a_3a_5 + \alpha_2\alpha_5 a_1a_3a_4 + \alpha_3\alpha_4 a_1a_2a_5 + \alpha_3\alpha_5 a_1a_2a_4 + \alpha_4\alpha_5 a_1a_2a_3$$
$$H_5{}^1 = \alpha_1 a_2a_3a_4a_5 + \alpha_2 a_1a_3a_4a_5 + \alpha_3 a_1a_2a_4a_5 + \alpha_4 a_1a_2a_3a_5 + \alpha_5 a_1a_2a_3a_4$$
$$H_5{}^0 = a_1a_2a_3a_4a_5 .$$

ЛИТЕРАТУРА:

[1] O *Stirling*-ovim brojevima. Godišen zbornik na filozofskiot na Univerzitet, prirodno-matematički oddel, Skopje, knj. 1, 1948, str. 49—95.

[2] *Ch. Jordan, Calculus of Finite Differences, Budapest* 1939, *P*. 233.

[3] *H. B. Dwight, Tables of Integrals and other Mathematical Data, New York* 1947, *P*. 7.

SUR UNE FORMULE SOMMATOIRE

K. Milošević, Skopie

RÉSUMÉ

L'auteur généralise la formule de Bernoulli relative à la somme des p-ièmes puissances des nombres entiers, comme suit.

Soient données p progressions arithmétiques

$$a_r,\ a_r+d_r,\ a_r+2\,d_r\,.\,.\,.,\ a_r+(n-1)\,d_r, \qquad r=1, 2, 3, \dots, p,$$

alors la somme des produits respectifs des termes de ces progressions

$$\prod_{r=1}^{p} a_r + \prod_{r=1}^{p}(a_r+d_r) + \prod_{r=1}^{p}(a_r+2\,d_r) + \cdot\ \cdot\ \cdot + \prod_{r=1}^{p}\{a_r+(n-1)\,d_r\}$$

peut être mise sous la forme

$$\sum_{k=1}^{p+1} n^{p-k+2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{B_{k-j-1}}{k-j-1} \binom{p-j}{k-j-1} H_p^{p-j},$$

où l'on a posé, pour abréger

$$\binom{s}{-1} = \frac{1}{s+1},$$

et où B_m désigne les nombres de Bernoulli définis symboliquement par

$$(1+B)^m - B_m = 0,$$

Tandis que les quantités $H_p{}^q$ sont les polynomes considérés par Mitrinović (Sur les nombres de Stirling. Annuaire de l'Univ. de Skopie, I, p. 49—95 (1948)) définis comme suit

$$\prod_{\nu=1}^{p}(a_\nu + x\,d_\nu) = \sum_{q=0}^{p} H_p{}^q\, x^q.$$
